Editorial Queyám

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Gilbert Añazco Campoverde • Paul Añazco Campoverde

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Gilbert Añazco Campoverde
Paul Añazco Campoverde

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Copyright 2025 Compañía Editorial
Reservados todos los derechos.
© Editorial QUEYÁM Cía. Ltda.
Pérez de Anda 01-180 y Castillo
Ambato – Ecuador
Teléfono: (+593) 96 239 7155
editorial@queyam.com

Primera Edición
ISBN: 978–9942–7409–0–8
Fecha de Publicación: 2025–06–16

Autores:
- Gilbert Adrian Añazco Campoverde
- Paul André Añazco Campoverde

Equipo Editorial

Director:	Diego Bonilla Jurado
Coordinador editorial:	Fernanda Núñez Ambato
Editor Literario:	Josué Sánchez Vargas
Diseño y Diagramación:	Christian Poaquiza Punina
Prologuista:	Pedro Intriago Leones

Revisores:

Evelyn Maricela Castro Mejía
• Universidad Internacional de la Rioja - España

Max Edmundo Cotera Mantilla
• Universidad Nacional de Educación a distancia - España

Dedicatoria

A nuestros padres Guilber Añazco y Susy Campoverde por todo su apoyo a lo largo de nuestras vidas. Sin lugar a duda, no fuésemos los profesionales de hoy sin ellos

Gilbert Adrián Añazco Campoverde

Gilbert Adrián Añazco Campoverde es Ingeniero Civil (2016) graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral-ESPOL. Obtuvo el título de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería Estructural, Sísmica y Geotécnica (2018) en la Universidad de Chile, alcanzando la distinción máxima y el primer lugar en su cohorte de posgrado; posee además el título de Máster en Ingeniería Matemática y Computación por la Universidad Internacional de La Rioja–UNIR (2025)

Se desempeña como docente a tiempo completo en la Universidad Técnica de Machala (UTMACH) desde noviembre de 2019, impartiendo asignaturas como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Análisis Matemático, Métodos Numéricos y Física en diversas carreras de ingeniería. Cuenta con experiencia profesional en el ámbito de la construcción y fiscalización de obras destacándose además como Ingeniero Estructural en la consultora Geosísmica.

Su trayectoria académica se complementa con la obtención del Diplomado en Inteligencia Artificial Aplicada a la Educación (2024), publicaciones científicas en el área de estructuras, vialidad y gestión de obras civiles con enfoque Lean Construction. Ha sido ponente en congresos nacionales e internacionales, destacando por su enfoque integrador entre la docencia, la investigación y la práctica profesional.

Correo: ganazco@utmachala.edu.ec

Paul André Añazco Campoverde

Paúl André Añazco Campoverde, MSc. es Ingeniero Civil por la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), donde fue reconocido como Mejor Egresado de su promoción. Obtuvo el título de Magíster en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería Estructural, Sísmica y Geotécnica en la Universidad de Chile, alcanzando la distinción máxima y el primer lugar en su cohorte de posgrado. Actualmente cursa el Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación en la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR), España.

Se desempeña como docente a tiempo completo en la Universidad Técnica de Machala (UTMACH), donde ha impartido asignaturas como Física, Dinámica, Estática, Mecánica de Fluidos y Cálculo en diversas carreras de ingeniería. Cuenta con experiencia profesional en el ámbito de la construcción y ha ejercido como superintendente, fiscalizador y administrador de múltiples proyectos de infraestructura.

Su trayectoria académica se complementa con publicaciones científicas en el área de análisis estructural, física aplicada y gestión de obras civiles con enfoque Lean Construction. Ha sido ponente en congresos nacionales e internacionales, destacando por su enfoque integrador entre la docencia, la investigación y la práctica profesional

Correo: panazco@utmachala.edu.ec

Prefacio

El presente libro titulado *Análisis Matemático: Cálculo Diferencial e Integral* ha sido elaborado con el propósito de ofrecer una obra didáctica y rigurosa que facilite el aprendizaje profundo del cálculo diferencial e integral, base fundamental para diversas ramas de las ciencias e ingenierías. El objetivo general de esta obra es proporcionar al estudiante y al profesional una comprensión sólida y clara de los conceptos, técnicas y aplicaciones del análisis matemático, apoyando tanto la formación académica como la aplicación práctica en contextos científicos y tecnológicos.

Esta obra se estructura en cuatro capítulos principales que abordan desde los fundamentos del cálculo diferencial —con especial énfasis en la derivación de funciones algebraicas, trascendentes e implícitas— hasta las aplicaciones prácticas de las derivadas y el estudio detallado de las integrales, incluyendo sus aplicaciones en problemas reales. Cada capítulo se inicia con objetivos de aprendizaje específicos y preguntas de enfoque que orientan la reflexión y el estudio crítico del contenido. Se complementa la teoría con ejemplos prácticos, ejercicios aplicados y problemas de autoevaluación que fortalecen el proceso formativo.

En cuanto a sus características pedagógicas, el libro se destaca por integrar un enfoque progresivo que parte de los conceptos básicos hacia los temas más complejos, facilitando así la comprensión gradual y sólida del análisis matemático. Se incorporan explicaciones claras, definiciones precisas y referencias bibliográficas actualizadas que respaldan cada tema. Además, se promueve el desarrollo de habilidades analíticas mediante la presentación de metodologías sistemáticas para la resolución de problemas, fomentando la aplicación del conocimiento en escenarios concretos de ingeniería, economía, física y otras disciplinas afines.

Este texto pretende ser un recurso integral tanto para estudiantes universitarios de carreras de ingeniería y ciencias exactas como para docentes e investigadores interesados en una herramienta pedagógica estructurada y fundamentada científicamente. Se espera que su lectura y estudio contribuyan a consolidar una formación matemática sólida, que sirva de soporte para el avance académico y profesional en diversas áreas del conocimiento.

Tabla de contenido

CAPÍTULO I

DERIVACIÓN DE FUNCIONES

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este apartado, los estudiantes serán capaces de:

- Comprender el concepto de derivada y su interpretación en el contexto del cálculo diferencial.
- Reconocer la evolución histórica de la derivada como herramienta fundamental en el análisis matemático y su aplicación en diversas ramas de la ciencia.
- Aplicar las principales reglas de derivación a funciones algebraicas, trascendentes e implícitas para resolver problemas matemáticos.
- Desarrollar habilidades prácticas en la derivación de funciones mediante las técnicas aprendidas en ejercicios.

Pregunta de enfoque

¿Cuál es el papel de la derivada en la determinación de la pendiente de una curva, y cómo se utilizan las derivadas para resolver problemas prácticos en diversas áreas científicas?

Resumen

Este capítulo introduce el concepto fundamental de la derivada, uno de los pilares del cálculo diferencial. A través de una revisión de su origen histórico, se observa cómo la derivada ha evolucionado para convertirse en una herramienta crucial en matemáticas y ciencias aplicadas. En su núcleo, la derivada mide la rapidez con la que cambia una función con respecto a su variable independiente, lo que permite estudiar la variabilidad de fenómenos matemáticos y naturales. En este capítulo, se explorarán las reglas fundamentales para derivar funciones algebraicas, trascendentes e implícitas, lo que proporcionará a los estudiantes las herramientas necesarias para resolver problemas prácticos. Mediante ejemplos ilustrativos, se pretende que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de la técnica de derivación, fundamental para avanzar en el estudio del cálculo diferencial.

Generalidades sobre la derivada

1. Fundamentos conceptuales

El cálculo diferencial es una de las ramas más fundamentales del análisis matemático, cuyo objetivo primordial es estudiar cómo las funciones cambian con respecto a sus variables independientes (Chan, 2021). En su esencia, el cálculo diferencial permite describir de manera precisa el cambio de una cantidad con respecto a otra, mediante el concepto de la derivada.

La derivada se puede entender intuitivamente como una medida de la velocidad de cambio o la tasa de cambio de una función en un punto específico. Dado una función $f(x)$, la derivada de la función en un punto x mide cuán rápido cambia $f(x)$ respecto a x (Pérez,2022). Formalmente, la derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 se define como el límite de la razón de cambio promedio de la función cuando el intervalo de medición se reduce a cero (Chan, 2021; Pérez, 2022). Matemáticamente, se expresa de la siguiente forma:

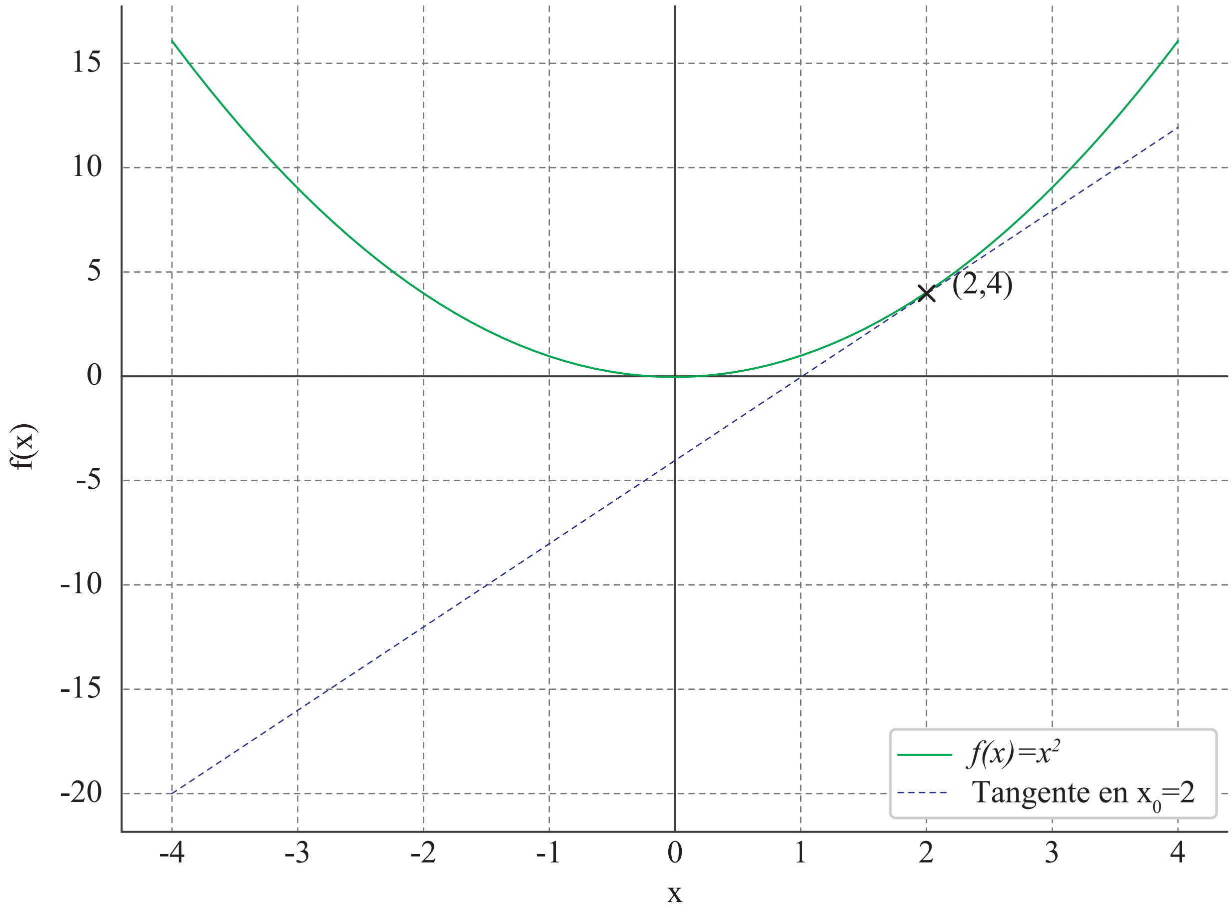
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Este límite, conocido como la derivada de la función $f(x)$ en x_0, tiene un significado geométrico importante: representa la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en el punto x_0. Esta recta tangente describe el comportamiento local de la función, y su pendiente indica la rapidez con que la función cambia en ese punto (Apostol, 2019).

Como se puede observar en la **Figura 1**, la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$ se muestra como la pendiente de la recta tangente en ese punto, ilustrando cómo la derivada refleja el cambio de la función en esa ubicación específica. La gráfica también muestra cómo la pendiente de la tangente varía según el punto de la curva.

Figura 1

Función $f(x) = x^2$ y su recta tangente en $x_0 = 2$



Nota. Elaboración propia.

La derivada también se puede ver como una extensión del concepto de pendiente de una recta. Mientras que la pendiente de una recta es una constante, la derivada de una función puede variar de punto a punto, lo que refleja que las funciones pueden cambiar a diferentes velocidades en diferentes partes de su dominio (Chan, 2021).

1.1. Historia de la derivada

El concepto de derivada, aunque fue formalizado en el siglo XVII, tiene sus raíces en la antigüedad, cuando matemáticos como Arquímedes y Fermat ya estudiaban las tasas de cambio de formas rudimentarias. Sin embargo, fue en el siglo XVII cuando la derivada adquirió su forma moderna gracias a los trabajos de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz (Blinder, 2013).

- **Isaac Newton (1642-1727)**, físico y matemático inglés, desarrolló el cálculo diferencial para abordar problemas relacionados con el movimiento de los cuerpos celestes, en particular el movimiento de los planetas. Su enfoque se centraba en las tasas de cambio instantáneas, que describían las fuerzas y el movimiento de los cuerpos. En su obra "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" (1687), Newton utilizó el concepto de derivada para describir las leyes del movimiento, desarrollando lo que hoy conocemos como la mecánica clásica (Garrett, 2015; Newton, 1987).
- **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)**, filósofo y matemático alemán, también desarrolló de manera independiente el cálculo diferencial, introduciendo la notación moderna de la derivada, $\frac{dy}{dx}$, y fue el primero en formalizar la diferenciación como una herramienta generalizada para estudiar el cambio de cualquier cantidad. Su notación fue más funcional y se adoptó ampliamente en las siguientes generaciones de matemáticos (Blinder, 2013; Garrett, 2015).

Ambos matemáticos, a pesar de su disputa sobre la prioridad del descubrimiento, sentaron las bases del cálculo diferencial, transformando el estudio del cambio y la variación en un campo sistemático de la matemática. Su trabajo permitió formular de manera precisa los conceptos de aceleración, flujo, y cambio instantáneo, lo que fue crucial para el desarrollo de la física y las ciencias aplicadas.

1.2. Utilidad del cálculo diferencial

La utilidad del cálculo diferencial no se limita a las matemáticas puras; tiene amplias aplicaciones prácticas en diversas áreas del conocimiento. Algunas de las principales aplicaciones incluyen:

- En física, el cálculo diferencial es fundamental para el estudio del movimiento. A través de la derivada, se pueden describir conceptos esenciales como la velocidad (que es la derivada de la posición respecto al tiempo) y la aceleración (que es la derivada de la velocidad respecto al tiempo). Esto permite modelar el movimiento de partículas, la dinámica de los cuerpos celestes, y otros fenómenos físicos como las ondas o la propagación de la luz (Apostol, 2019).

  Ejemplo: En el caso de un **movimiento rectilíneo uniforme acelerado** (MRUA), la posición de un objeto está dada por $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, donde a es la aceleración constante. La derivada de esta función con respecto al tiempo nos da la **velocidad:** $v(t) = v_0 + at$, y la derivada de la velocidad nos da la **aceleración:** $at = a$, lo que nos permite analizar el comportamiento dinámico de los objetos (Vallejo & Zambrano, 2005).

2. Metodologías

El estudio de la derivada abarca diversas metodologías que permiten entender y aplicar de forma efectiva los conceptos de cálculo diferencial. Las principales metodologías son:

2.1. Definición formal a través de límites

La derivada se define rigurosamente mediante el límite de la razón de cambio promedio a medida que el intervalo de cambio se reduce a cero (Blinder, 2013). Esta definición es fundamental para comprender cómo se comporta una función en puntos específicos. La expresión formal es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x + \Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$$

Este concepto es clave para derivar funciones en el contexto de análisis matemático y es el punto de partida para el estudio de la derivada.

2.2. Reglas de derivación

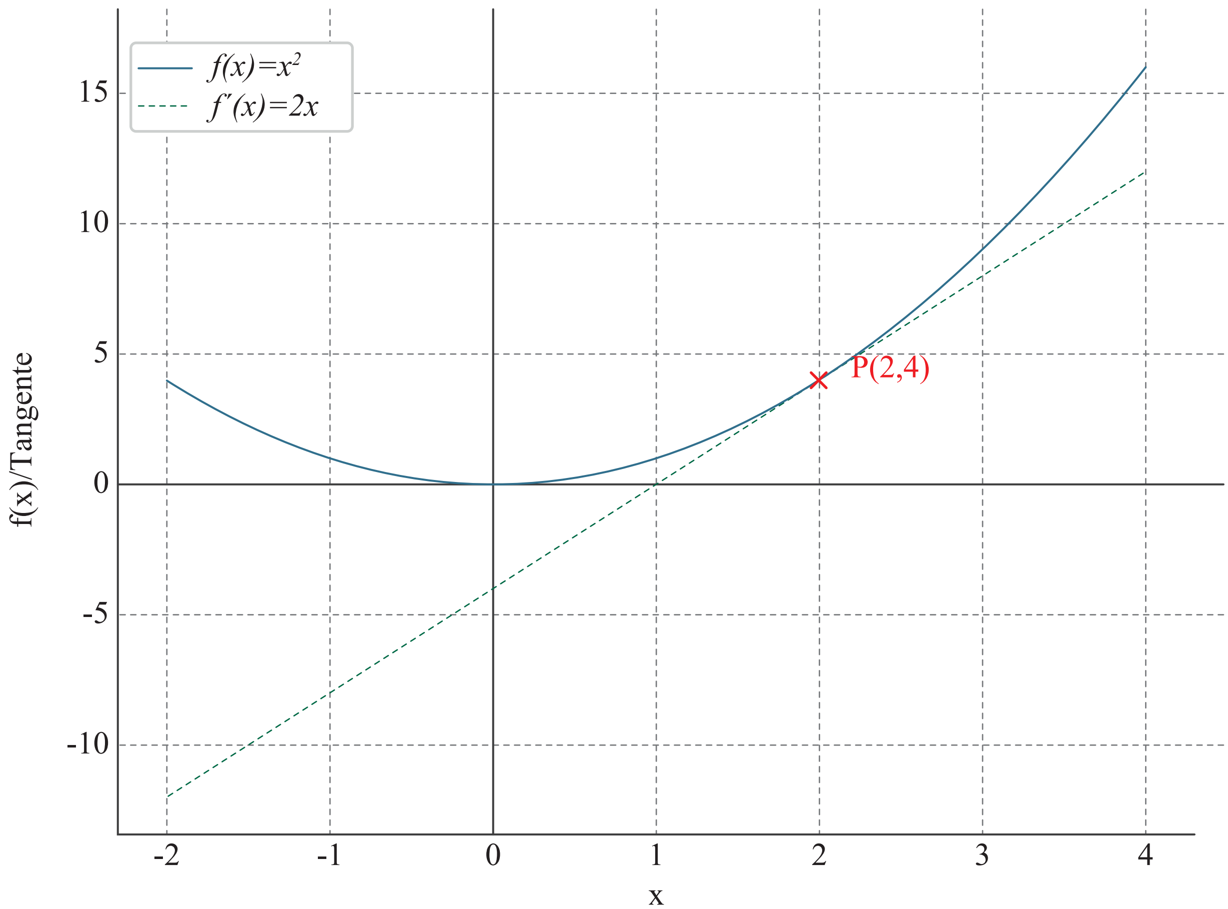
Para simplificar el proceso de derivación y evitar la repetición de cálculos, se han establecido un conjunto de reglas que permiten abordar eficientemente las derivadas de diversas combinaciones de funciones. Estas reglas facilitan el cálculo de derivadas sin necesidad de recurrir constantemente al proceso de límites, lo que optimiza el análisis y la resolución de problemas matemáticos (Baeten & Basten, 2001; Chan, 2021).

2.3. Interpretación geométrica

La derivada tiene una interpretación geométrica significativa: se puede visualizar como la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en un punto dado. Esta interpretación facilita la comprensión de cómo cambia la función en función de su variable independiente y proporciona una forma intuitiva de abordar problemas relacionados con el comportamiento de las funciones.

Figura 2

Gráfico de la función $f(x) = x^2$ y su recta tangente en $x_0 = 2$



La Figura 2 muestra la función $f(x) = x^2$ y su derivada $f'(x) = 2x$ en el mismo plano cartesiano. En este gráfico se destaca lo siguiente:

- ✓ **La curva de la función $f(x) = x^2$** está representada en color azul. Esta curva es una parábola que abre hacia arriba, lo cual es característico de funciones cuadráticas.
- ✓ **La recta tangente en el punto $x_0 = 2x$** se muestra con una línea discontinua de color rojo. La recta tangente es una recta que toca la curva solo en un punto, sin cruzarla, y cuya pendiente es igual a la derivada de la función en ese punto.
- ✓ **El punto de tangencia $P(2,4)$** está marcado con un punto verde. Este es el punto donde la recta tangente toca la curva. La coordenada $P(2{,}4)$ indica que, en $x = 2$, la función $f(x)$ toma el valor 4, lo que corresponde al valor de $f(x_0)$.

3. Aplicaciones en optimización

La derivada es una herramienta fundamental en optimización, ya que permite encontrar los puntos críticos de una función, que corresponden a máximos, mínimos o puntos de inflexión. Este proceso es esencial para resolver problemas en diversas áreas como economía (optimización de costos y beneficios), física (optimización de energía) y biología (optimización de modelos de crecimiento) (Salvador et al., 2024).

3.1. Métodos numéricos y aproximaciones

En ocasiones, las derivadas no se pueden calcular de manera directa o exacta. En estos casos, se recurre a métodos numéricos como las aproximaciones de diferencias finitas, que permiten calcular derivadas de forma aproximada. Estos métodos son útiles especialmente cuando se trabaja con datos empíricos o funciones que no tienen una expresión algebraica sencilla. Sin embargo, antes de aplicar estos métodos, es fundamental comprender la nomenclatura y simbología asociada a la derivada, ya que el correcto manejo de estos conceptos facilita la interpretación y la aplicación precisa de los procedimientos numéricos.

3.2. Nomenclatura y simbología de la derivada

La derivada de una función se denota de diferentes formas dependiendo del contexto. La forma más común es la notación de Leibniz, que se utiliza para indicar cómo cambia una función respecto a una variable independiente. A continuación, se presentan algunas de las formas más usadas:

Notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} \; o \; \frac{d}{dx}(f(x))$$

Donde $y = f(x)$ es la función y x es la variable independiente.

Notación de Lagrange

$$f(x)$$

Representa la primera derivada de $f(x)$

$$f''(x)$$

La segunda derivada de $f(x)$, y así sucesivamente para derivadas de orden superior.

Notación de Newton

$$\dot{y}$$

Representa la derivada de y respecto al tiempo, es decir, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

Derivación de funciones algebraicas

1. Reglas del cálculo diferencial para la derivación de funciones algebraicas

El cálculo diferencial ofrece un conjunto de reglas fundamentales que facilitan la derivación de funciones algebraicas. Estas reglas permiten obtener derivadas de manera más rápida y eficiente sin tener que recurrir a la definición formal de límite en cada paso. A continuación, se presentan las principales reglas que se aplican para la derivación de funciones algebraicas:

Regla de la suma

La derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas de las funciones. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

Es decir, la derivada de la suma de dos funciones es simplemente la suma de sus derivadas.

Es importante recordar que la regla de la suma no solo se aplica a la suma de dos términos. En el caso de expresiones más complejas, como los polinomios, las funciones pueden estar involucradas en combinaciones lineales de términos sumados y restados. En estos casos, la derivada de una suma o resta de varias funciones se calcula de manera similar, derivando cada término por separado.

Por ejemplo, la derivada de una combinación de funciones de la forma $u + v - w$ (donde u, v y w son funciones diferenciables) se expresa como:

$$\frac{d}{dx}(u+v+w)\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dv}$$

Esto es particularmente útil al trabajar con polinomios, ya que estos están formados por sumas o restas de términos. Al aplicar esta fórmula, se obtiene una forma estructurada para derivar cada término del polinomio de manera independiente, simplificando el proceso de cálculo.

Regla del producto

La derivada del producto de dos funciones se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g\,(x) + f\,(x)\cdot g'(x)$$

Esta regla permite derivar el producto de dos funciones de manera eficiente.

Regla del cociente

Para derivar el cociente de dos funciones, se usa la siguiente fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g\,(x) - f\,(x)\cdot g'(x)}{[g\,(x)]^2}$$

Esta regla se aplica cuando una función es el cociente de otras dos, y es esencial para calcular derivadas en estos casos.

Regla de la potencia

Si $f(x) = x^n$, donde n es cualquier número real, la derivada de $f(x)$ es:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n\cdot x^{n\quad 1}$$

Esta regla es fundamental y se aplica cuando la función tiene una forma de potencia de x, como x^2, x^3, o x^n, y se utiliza frecuentemente en la derivación de polinomios.

2. Ejemplos

A continuación, se presentan cuatro ejemplos prácticos de derivación de funciones algebraicas, aplicando las reglas del cálculo diferencial descritas anteriormente.

Ejemplo 1: Derivada de una suma de funciones

Supongamos que tenemos las siguientes funciones algebraicas:

$$f(x) = x^2 + 3x$$

Queremos calcular su derivada. Según la **regla de la suma**, la derivada de una suma es la suma de las derivadas de cada función. Aplicando las reglas de la potencia:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[3x]$$

La derivada de x^2, es $2x$, y la derivada de $3x$ es 3. Entonces:

$$f'(x) = 2x + 3$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ es $f'(x) = 2x + 3$

Ejemplo 2: Derivada de un producto de funciones

Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2)(\sin(x))$$

Queremos calcular la derivada de $f(x)$. Usamos la **regla del producto** para derivar el producto de x^2 y $\sin(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^2] \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x)]$$

La derivada de x^2 es $2x$, y la derivada de $\sin(x)$ es $\cos(x)$. Entonces:

$$f'(x) = (2x) \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = (x^2)(\sin(x))$ es:

$$f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$$

Ejemplo 3: Derivada de un cociente de funciones

Supongamos que tenemos el cociente de dos funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Queremos encontrar su derivada. Usamos la **regla del cociente**, que establece que:

$$f'(x) = \frac{[2x] \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2}$$

Simplificando el numerador:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Finalmente, la derivada de $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ es:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Ejemplo 4: Derivada de una función de potencia

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2$$

Queremos calcular la derivada de $f(x)$. Aplicamos la **regla de la potencia** a cada término:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^4] - 5 \cdot \frac{d}{dx}[x^3] + 2\frac{d}{dx}[x^2]$$

Las derivadas de x^4, x^3 y x^2 son $4x^3, 15x^2$ y $4x$, respectivamente. Por lo tanto:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x$$

La derivada de $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2$ es:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x$$

Las reglas fundamentales del cálculo diferencial proporcionan una forma sistemática y eficiente de derivar funciones algebraicas. Estas reglas son esenciales para calcular derivadas en una amplia variedad de funciones que surgen en diversas aplicaciones matemáticas y científicas. Los ejemplos presentados muestran cómo aplicar estas reglas en diferentes contextos, desde funciones polinómicas hasta productos y cocientes de funciones.

Miscelánea de derivación de funciones algebraicas

1. Las reglas del cálculo diferencial para la derivación de funciones algebraicas

Además de las reglas básicas para derivar funciones algebraicas, existen varios casos y métodos que permiten extender el uso de las herramientas del cálculo diferencial. Estas reglas se aplican a diferentes tipos de funciones algebraicas que no siempre encajan directamente en las categorías más simples de sumas, productos o potencias. En esta sección, se revisan algunas de las reglas y casos más importantes, que permiten derivar funciones más complejas y facilitar la resolución de problemas.

Regla de la constante multiplicada por una función: Si $f(x)$ es una función diferenciable y c es una constante, la derivada de $c \cdot f(x)$ es:

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$$

Esta regla establece que la derivada de una constante multiplicada por una función es simplemente la constante multiplicada por la derivada de la función.

Derivadas de funciones racionales: Las funciones racionales son cocientes de funciones polinómicas. Si tenemos una función del tipo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, la derivada de esta función se calcula mediante la **regla del cociente:**

$$f'(x) = \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{[q(x)]^2}$$

Este es un caso frecuente cuando se derivan fracciones algebraicas.

Funciones con exponentes fraccionarios: Las funciones con exponentes fraccionarios se derivan aplicando la regla de la potencia, pero extendida a exponentes no enteros. Si tenemos una función de la forma:

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

Donde m y n son enteros, la derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Este tipo de derivación es común en funciones que involucran raíces, como $f(x) = \sqrt{x}$, que puede escribirse como $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Derivación de funciones con raíces: Para derivar funciones que contienen raíces cuadradas o raíces de diferente índice, se utiliza la regla de la potencia. Si se tiene una raíz cuadrada de x, se escribe como $x^{\frac{1}{2}}$ y se deriva utilizando la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

De forma similar, para raíces cúbicas o de otros grados, se aplica la misma regla de potencia con el exponente correspondiente.

Derivada de funciones compuestas (regla de la cadena): La derivada de funciones compuestas, se obtiene mediante la regla de la cadena, que establece que si $y = f\left(g(x)\right)$, entonces la derivada de y con respecto a x es:

$$\frac{dy}{dx} = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Este es un caso importante cuando se derivan funciones que son composición de otras funciones, como $f(x) = \sin(x^2)$.

2. Ejemplos

A continuación, se presentan algunos ejemplos prácticos que ilustran como aplicar estas reglas a funciones algebraicas más complejas.

Ejemplo 1: Derivada de una constante multiplicada por una función

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = 5(x^3 - 4x + 2)$$

Queremos calcular su derivada. Usamos la regla de la constante multiplicada por una función:

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{d}{dx}[x^3 - 4x + 2]$$

Derivamos x^3, $-4x$ y 2 de acuerdo con la regla de la potencia y la derivada de una constante:

$$f'(x) = 5 \cdot (3x^2 - 4) - 15x^2 - 20$$

La derivada de $f(x) = 5 \cdot (x^3 - 4x + 2)$ es:

$$f'(x) = 15x^2 - 20$$

Ejemplo 2: Derivada de una función racional

Consideremos la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 2x}$$

Queremos calcular la derivada utilizando la **regla del cociente**. Primero, identificamos $p(x) = x^2 + 3x$ y $q(x) = x^3 - 2x$. Aplicamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot(x^3-2x)-(x^2+3x)\cdot(3x^2-2)}{(x^3-2x)^2}$$

Este resultado se puede simplicar, pero se mantiene en esta forma para mostrar la aplicación de la regla. El paso de simplificación es esencial para obtener la forma más sencilla de la derivda.

Ejemplo 3: Derivada de una función con exponente fraccionario

Consideremos la siguiente función con un exponenete fraccionario:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

Aplicamos la regla de la potencia para derivar y por lo tanto, la derivada de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ es:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

Ejemplo 4: Derivada de una función compuesta

Supongamos que tenemos la función:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

La derivada de esta función se calcula utilizando la **regla de la cadena.** Primero, identificamos las funciones $f(u) = \sin(u)$ y $g(x) = x^2$, y aplicamos la regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos(x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

La derivada de x^2 es $2x$, así que:

$$f'(x) = 2x\cdot\cos(x^2)$$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = \sin(x^2)$ es:

$$f'(x) = 2x\cdot\cos(x^2)$$

La derivación de funciones algebraicas abarca una variedad de casos que van desde la aplicación de reglas simples, como la suma y el producto, hasta casos más complejos que involucran cocientes, raíces y funciones compuestas. La comprensión de estas reglas y su correcta aplicación es fundamental para abordar problemas más avanzados en cálculo diferencial. A través de los ejemplos presentados, se evidencia cómo cada regla se aplica en contextos específicos para calcular derivadas de manera sistemática y precisa.

Derivación de funciones trascendentes

1. Regla del cálculo diferencial para la derivación de funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son aquellas que no pueden ser obtenidas mediante combinaciones finitas de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces). Estas incluyen funciones como e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, y muchas otras (Sáenz, 2016). A continuación, se presentan las principales reglas para derivar funciones trascendentes:

Derivada de una función e^x: La función exponencial e^x tiene una propiedad única: su derivada es igual a sí misma. Es decir:

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Esta es una de las propiedades más importantes del cálculo diferencial y tiene amplias aplicaciones en muchos campos de las ciencias y la ingeniería.

Derivada de la función logaritmo natural $\ln(x)$: La derivada del logaritmo natural de x es:

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

Esta regla se aplica cuando la función está en forma de $\ln(x)$, y es fundamental en el análisis de funciones que involucran crecimiento y tasas de cambio.

Derivada de las funciones trigonométricas: Las funciones trigonométricas tienen derivadas específicas:

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cos\,(x)] = \sin\,(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\tan\,(\mathrm{x})] = sec^2(x)$$

Estas derivadas son esenciales en el análisis de ondas, movimientos periódicos y diversas aplicaciones en física y otras ciencias.

Derivada de las funciones trigonométricas inversas: Las funciones trigonométricas inversas también tienen derivadas bien definidas. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[\arcsin(\mathrm{x})] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arccos(\mathrm{x})] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan(\mathrm{x})] = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivada de las funciones hiperbólicas: Las funciones hiperbólicas, como $sinh(x)$ y $cosh(x)$, tienen derivadas que siguen una estructura similar a las funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}[\sinh(x)] = \cosh\,(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = \sinh\,(x)$$

Derivada de funciones compuestas (regla de la cadena): Al igual que con las funciones algebraicas, la **regla de la cadena** también se aplica a funciones trascendentes. Si se tiene una función compuesta $f(x) = g(h(x))$, la derivada se obtiene multiplicando la derivada de la función exterior por la derivada de la función interior:

$$\frac{d}{dx}\left[g\big(h(x)\big)\right] = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

Esta regla es muy útil cuando se derivan funciones que son composiciones de funciones trascendentes.

2. Ejemplos

A continuación, se presentan ejemplos prácticos de derivación de funciones trascendentes, aplicando las reglas descritas anteriormente.

Ejemplo 1: Derivada de la función exponencial e^x:

Consideremos la función:

$$f(x) = e^x$$

Utilizando la regla de derivación de la función exponencial:

$$f'(x) = e^x$$

Como se mencionó previamente, la derivada de e^x es simplemente e^x, lo que es una característica única de la función exponencial.

Ejemplo 2: Derivada del logaritmo natural $ln(x)$

Supongamos que tenemos la función:

$$f(x) = ln\,(x)$$

La derivada de ln (x) es:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Este resultado es fundamental y se utiliza en muchos problemas relacionados con tasas de cambio, crecimiento, y otras aplicaciones en matemáticas y ciencias.

Ejemplo 3: Derivada de una función trigonométrica $\sin(x)$

Consideremos la función:

$$f(x) = \sin(x)$$

La derivada de $\sin(x)$ se calcula utilizando la regla de derivación de funciones trigonométricas:

$$f'(x) = \cos(x)$$

Este resultado es crucial en la descripción de fenómenos periódicos, como las ondas.

Ejemplo 4: Derivada de una función trigonométrica inversa $\boldsymbol{arcsin}\ (\boldsymbol{x})$

Ahora consideremos la función inversa de la función seno:

$$f(x) = \boldsymbol{arcsin}(x)$$

La derivada de $arcsin(x)$ se calcula utilizando la fórmula correspondiente para funciones trigonométricas inversas:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Este resultado es útil, por ejemplo, en problemas de geometría y trigonometría inversa.

Ejemplo 5: Derivada de una función hiperbólica $\boldsymbol{sinh}\ (\boldsymbol{x})$

Consideremos la función hiperbólica:

$$f(x) = sinh(x)$$

La derivada de $sinh\ (x)$ es:

$$f'(x) = cosh(x)$$

Este tipo de derivada es común en problemas que involucran modelos de crecimiento y otros fenómenos en física e ingeniería.

Las funciones trascendentes son fundamentales en el cálculo diferencial y tienen derivadas específicas que se aplican en diversos contextos de la ciencia y la ingeniería. El conocimiento de cómo derivar funciones exponenciales, logaritmos, trigonométricas e hiperbólicas permite abordar una amplia gama de problemas en los que las tasas de cambio y los fenómenos naturales son descritos matemáticamente. Los ejemplos presentados ilustran la aplicación de las reglas de derivación de manera clara y directa.

Derivación de funciones implícitas

1. Reglas del cálculo diferencial para la derivación de funciones implícitas

Las funciones implícitas son aquellas en las que la variable dependiente y y la variable independiente x están relacionadas por una ecuación, pero no se puede despejar y de forma explícita en términos de x (Apostol, 2019). Por ejemplo, una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$ define una circunferencia, pero no es fácil resolver para y en términos de x (o viceversa).

Para derivar funciones implícitas, se utiliza el método de la derivación implícita, que consiste en derivar ambos lados de la ecuación con respecto a x, y luego resolver para $\frac{dy}{dx}$. Este proceso requiere el uso de la regla de la cadena y un manejo cuidadoso de las derivadas de y, tratándola como una función de x (Ruiz et al., 2017).

Las principales reglas para la derivación de funciones implícitas son:

Regla de la cadena: Cuando se deriva una función que involucra y (como $y = f(x)$) se debe recordar que y es una función de x, por lo que su derivada con respecto a x debe ser multiplicada por $\frac{dy}{dx}$. Esto se conoce como **derivada implícita**. Por ejemplo, si tenemos y^2, la derivada con respecto a x es:

$$\frac{d}{dx}[y^2] = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Aquí, y es tratado como una función de x, por lo que debemos multiplicar por $\frac{dy}{dx}$ al aplicar la derivada.

Derivación de ambas partes de la ecuación: Si la ecuación implica una relación entre x y y, como $x^2 + y^2 = 1$, derivamos ambos lados con respecto a x, utilizando la **regla de la cadena** para y. Esto da lugar a:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

A partir de ahí, despejamos $\frac{dy}{dx}$ para encontrar la derivada implícita.

Tratar y como una función de x : Cada vez que derivamos un término que involucra y, debemos tratarlo como una función de x, lo que significa que la derivada de y con respecto a x no es 1, sino $\frac{dy}{dx}$.

(Alvarado & García, 2016; Camacho, 2012)

2. Ejemplos

A continuación, se presentan ejemplos prácticos para ilustrar cómo derivar ecuaciones implícitas.

Ejemplo 1: Derivada implícita de una curva

$$x^2 + y^2 = 1$$

Para derivar implícitamente esta ecuación con respecto a x , derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x . Recordemos que cuando derivamos y^2, aplicamos la regla de la cadena y multiplicamos por $\frac{dy}{dx}$. La derivación de ambos lados da:

$$\frac{dy}{dx}[x^2] + \frac{dy}{dx}[y^2] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Así la derivada implícita de $x^2 + y^2 = 1\ es \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Ejemplo 2: Derivada implícita de una curva más compleja

Consideramos la ecuación:

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Para derivar implícitamente esta ecuación, aplicamos la derivada de ambos lados con respecto a x. La derivada de x^3es $3x^2$, la derivada de y^3es $3y^2.\frac{dy}{dx}$, y la derivada es $3xy$ requiere el uso de la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[y^3] = \frac{d}{dx}[3xy]$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 3 \cdot (y + x \cdot \frac{dy}{dx})$$

Desarrollamos y reorganizamos la ecuación:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 3y + 3x \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ahora movemos los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ a un lado de la ecuación:

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 3x \cdot \frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$

Factorizamos $\frac{dy}{dx}$ a un lado izquierdo:

$$\frac{dy}{dx} \cdot (3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

Finalmente, despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Así que la derivación implícita de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy\ es\ \frac{dy}{dx} = \frac{y-x^2}{y^3-x}$

Ejemplo 3: Derivada implícita con términos trigonométricos

Consideramos la ecuación:

$$\sin(x) + y = x \cdot \cos\,(y)$$

Para derivar implícitamente, aplicamos la derivada de ambos lados con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)] + \frac{d}{dx}[y] = \frac{d}{dx}[x \cdot \cos(y)]$$

La derivada de $\sin(x)$ es $\cos(x)$, y la derivada de y con respecto a x es $\frac{dy}{dx}$. Para el termino $x \cdot \cos\,(y)$, aplicamos la regla del producto y recordamos que la derivada de $\cos\,(y)$ con respecto a x es $-\sin(y) \cdot \frac{dy}{dx}$:

$$\cos(x) + \frac{dy}{dx} = \cos(y) - x \cdot \sin\,(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

Reorganizamos para despejar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(y) - \cos\,(x)$$

Factorizamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} \cdot (1 + x \cdot \sin(y)) = \cos(y) - \cos\,(x)$$

Finalmente, despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(y) - \cos(x)}{1 + x \cdot \sin(y)}$$

La derivación de funciones implícitas permite encontrar la tasa de cambio de una variable dependiente en relación con una variable independiente cuando no se puede despejar explícitamente la función. Este método utiliza la regla de la cadena y requiere derivar ambos lados de la ecuación, tratando las variables dependientes como funciones de la variable independiente.

Los ejemplos mostrados ilustran cómo aplicar la derivación implícita en diferentes tipos de ecuaciones, desde simples curvas geométricas hasta ecuaciones que involucran funciones trigonométricas.

Observaciones finales

En este capítulo, se ha explorado el concepto fundamental de la derivada dentro del contexto del cálculo diferencial. Comenzamos con los fundamentos conceptuales e históricos de la derivada, comprendiendo su origen y evolución a lo largo del tiempo, desde las contribuciones clave de Newton y Leibniz. La derivada se establece como una medida de la rapidez con la que una función cambia respecto a su variable independiente, y se convierte en una herramienta esencial en el análisis matemático y la modelización de fenómenos en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Se revisaron las reglas básicas de derivación, como la derivación de funciones algebraicas, exponenciales, logaritmos, trigonométricas e hiperbólicas, y se introdujeron las reglas para derivar funciones implícitas. Además, se proporcionaron ejemplos prácticos para ilustrar la aplicación de estas reglas, mostrando cómo derivar funciones polinómicas, racionales, trigonométricas y de diversas combinaciones.

Finalmente, se presentó cómo las derivadas pueden ser aplicadas para resolver problemas de optimización, geometría y análisis de tasas de cambio. El dominio de estas técnicas es crucial para avanzar en estudios más complejos de cálculo y sus aplicaciones en ciencia, economía, ingeniería, y muchas otras áreas. Las principales fórmulas utilizadas a lo largo de este capítulo se resumen en la Tabla 1, que recopila de manera sistemática las derivadas fundamentales de las funciones elementales.

Tabla 1

Fórmulas fundamentales de derivación en cálculo diferencial

Tipo de función	Función $f(x)$	Derivada $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
Constante	c	0
Identidad	x	1
Potencia	x^n	nx^{n-1}, donde $n \in \mathbb{R}$
Raíz	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
Exponencial	e^x	e^x

	a^x	$a^x \ln(a)$, con $a > 0$, $a \neq 1$
Logarítmica	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$, con $x > 0$
	$log_a(x)$	$\frac{1}{xln(a)}$, con $a > 0$, $a \neq 1$
Trigonométricas	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	$\tan(x)$	$sec^2(x), con\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
	$\cot(x)$	$-csc^2(x)$
	$\sec(x)$	$\sec(x)\ \tan(x)$
	$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$
Trigonométricas inversas	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Recomendaciones para el estudio:

- ✓ Estas fórmulas constituyen el núcleo del cálculo diferencial.
- ✓ Es conveniente no solo memorizarlas, sino comprender sus demostraciones a través de límites y propiedades algebraicas.
- ✓ En el caso de funciones compuestas, su análisis requiere especial atención a la regla de la cadena.

Autoevaluación

A continuación, se presenta una serie de preguntas para ayudar a reforzar los conceptos aprendidos en este capítulo. Responder estas preguntas permitirá evaluar la comprensión de los temas tratados.

1. Defina la derivada en términos matemáticos y explique su importancia en el análisis de funciones.

2. ¿Cómo se interpreta geométricamente la derivada de una función?
3. Calcule la derivada de la siguiente función utilizando las reglas de derivación:

$$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$$

4. Derive implícitamente de la siguiente ecuación con respecto a x:

$$x^2 + y^2 = 25$$

5. Explique cómo derivar una función de la forma $y = e^{x^2}$ ¿Cuál es la derivada?
6. ¿Cuál es la derivada de la función $In\ (x^2 + 1)$?
7. Resuelva el siguiente problema de optimización utilizando derivadas: Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, y su posición en el tiempo t está dada por la función $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Determine el tiempo en el que el objeto alcanza su velocidad máxima.

8. Dada la función $f(x) = sin\ (3x^2 - 5x + 2)$, calcula su derivada utilizando la regla de la cadena.

   Pista: Aplica la regla de la cadena para derivar la función compuesta $g(h(x))$, donde $g(u) = sin\ (u)$ y $h(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

9. **Optimización en un contexto económico:** Una empresa fabrica y vende un producto. El costo de producción $C(x)$ de x unidades del producto está dado por la función:

$$c(x) = 100 + 5x + 0.5x^2$$

   y el ingreso $R(x)$ por la venta de x unidades se describe mediante la función:

$$R(x) = 20x - 0.1x^2$$

   Encuentra el número de unidades que debe producir la empresa para maximizar su beneficio (diferencia entre ingreso y costo). Calcula la derivada del beneficio y encuentra el valor de x que maximiza dicho beneficio.

Referencias bibliográficas

Alvarado, M., & García, C. (2016). Cálculo diferencial en competencias (1st ed., Vol. 1). Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V.

Apostol, T. M. (2019). *Calculus I*: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal (1st ed., Vol. 1). Editorial Reverte.

Baeten, J. C. M., & Basten, T. (2001). Partial-Order Process Algebra (and its relation to Petri Nets). Handbook of Process Algebra, 769–872. https://doi.org/10.1016/B978-044482830-9/50031-X

Blinder, S. M. (2013). *Calculus*. Guide to essential math, 79–100. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407163-6.00006-0

Camacho, A. (2012). Cálculo diferencial (2nd ed., Vol. 1, Issue June). Editorial Díaz Santos.

Chan, D. (2021). Cálculo diferencial (L. Benítez, Ed.; 2nd ed., Vol. 2). Klik.

Garrett, S. J. (2015). Differential calculus II. Introduction to actuarial and financial mathematical methods, 119–145. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-800156-1.00004-2

Newton, I. (1987). *Philosophiæ naturalis principia mathematica. In Philosophiæ naturalis principia mathematica.*

Pérez, R. (2022). Cálculo diferencial (R. Luján, Ed.; 2nd ed., Vol. 1). Klik.

Ruiz, Á., Ruiz, Á., & Barrantes, H. (2017). Elementos de cálculo diferencial Volumen I y II (2nd ed., Vol. 2). Editorial Universidad de Costa Rica.

Sáenz, J. (2016). Cálculo diferencial con funciones trascendentes tempranas (2nd ed., Vol. 1). Editorial Hipotenusa.

Salvador, G. D. G., Jaramillo, L. A., Valenzuela, J. E. T., & Lara, N. F. V. (2024). La derivada y sus aplicaciones a la economía y la administración. Fondo Editorial La Cantuta. https://doi.org/10.54942/LACANTUTA.45

CAPÍTULO II

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este capítulo, los estudiantes serán capaces de:

- Analizar máximos, mínimos y puntos de inflexión usando derivadas.
- Aplicar la primera derivada para hallar puntos críticos e intervalos de crecimiento/decrecimiento.
- Usar la segunda derivada para clasificar puntos críticos (máximos, mínimos o inflexión).
- Resolver problemas de optimización (maximizar/minimizar funciones) en economía, física y biología.

Pregunta de enfoque

¿Cómo se utilizan las derivadas para encontrar los puntos de máximo y mínimo en una función?

Resumen

En este capítulo, se exploran diversas aplicaciones de las derivadas, particularmente en el análisis de máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones. Estos conceptos son fundamentales no solo en el ámbito académico, sino en muchas áreas de las ciencias aplicadas, ya que permiten modelar y resolver problemas relacionados con la optimización, como la maximización de beneficios, la minimización de costos o el análisis de fenómenos físicos. Se abordarán los criterios de la primera derivada y segunda derivada, que proporcionan herramientas eficaces para identificar y clasificar puntos críticos de una función. A lo largo del capítulo, se presentarán ejemplos prácticos que ilustran cómo aplicar estos criterios y resolver problemas de optimización mediante el uso de derivadas.

Máximos y mínimos de una función: Criterio de la primera derivada

1. Fundamentos conceptuales

En el análisis matemático, los máximos y mínimos de una función son valores extremos que una función puede alcanzar dentro de un intervalo. Estos puntos son esenciales en la optimización, ya que permiten identificar los valores de una variable independiente que corresponden a los puntos más altos (máximos) o más bajos (mínimos) de una función (Azpilicueta et al., 2020). El criterio de la primera derivada es una de las herramientas más útiles para encontrar y clasificar estos puntos.

Una función $f(x)$ puede tener máximos o mínimos en puntos donde su derivada es igual a cero, es decir, en los puntos críticos. Los puntos críticos se encuentran resolviendo la ecuación:

$$f'(x) = 0$$

1.1. Teoría del criterio de la primera derivada:

- **Crecimiento y decrecimiento de la función:** Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, la función está **creciendo** en este intervalo. Si $f'(x) < 0$, la función está **decreciendo.**
- **Puntos críticos y comportamiento:** Un **punto crítico** de la función es aquel punto $x = c$ donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Sin embargo, para clasificar el punto crítico como un máximo o un mínimo, se analiza el comportamiento de la derivada en los intervalos alrededor de c.

2. Aplicación de criterios de la primera derivada

El criterio de la primera derivada establece que, para clasificar un punto crítico, se observa cómo cambia el signo de la derivada antes y después del punto crítico:

- Si la derivada cambia de positiva a negativa en un punto c, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$.
- Si la derivada cambia de negativa a positiva en un punto c, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = c$.
- Si la derivada no cambia de signo en $x = c$, el punto no es máximo ni mínimo (es punto de inflexión) (Agüero Calvo & Fallas Monge, 2024).

Este método se puede resumir en el siguiente esquema:

- $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ **(función creciente):** La función es ascendente en el intervalo.
- $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ **(función decreciente):** La función es descendente en el intervalo.
- $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **(punto crítico):** Es necesario verificar el comportamiento alrededor de este punto.

A través de estos pasos, el criterio de la primera derivada permite identificar los puntos de máximo y mínimo relativos y, por lo tanto, optimizar o analizar el comportamiento de una función en diversos contextos.

3. Ejemplos

Ejemplo 1: Determinación de máximos y mínimos utilizando el criterio de la primera derivada

Supongamos que tenemos la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$$

Paso 1: Encontrar la derivada de la función

La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Para encontrar los puntos críticos, resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$3x^3 - 12x + 9 = 0$$

Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Factorizamos la ecuación cuadrática:

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Entonces, $x = 3\ y\ x = 1$ son solo puntos críticos.

Paso 3: Analizar el signo de la derivada en los intervalos

Para determinar si estos puntos son máximos o mínimos, analizamos el signo de la derivada en los intervalos definidos por los puntos críticos $x = 1\ y\ x = 3$

- En el intervalo $(-\infty, 1)$, tomamos un valor de prueba, por ejemplo, $x = 0$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = 9 > 0$$

Esto indica que la función está **creciendo** en este intervalo.

- En el intervalo $(1,3)$, tomamos un valor de prueba en este intervalo.

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 < 0$$

Esto indica que la función está **decreciendo** en este intervalo.

- En el intervalo $(3, \infty)$, tomamos un valor de prueba, por ejemplo, $x = 4$

$$f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 21 > 0$$

Esto indica que la función está **creciendo** en este intervalo.

Paso 4: Concluir los resultados

- En $x = 1$, la derivada cambia de **positiva a negativa**, lo que indica un **máximo relativo** en $x = 1$.
- En $x = 3$, la derivada cambia de **negativa a positiva**, lo que indica un **mínimo relativo** en $x = 3$.

Por lo tanto $x = 1$ es un **máximo relativo** y $x = 3$ es un **mínimo relativo.**

Resultado:

- **Máximo relativo:** $x = 1$
- **Mínimo relativo:** $x = 3$

Este ejemplo muestra cómo utilizar el criterio de la primera derivada para encontrar y clasificar los máximos y mínimos de una función.

Máximos y mínimos de una función: criterio de la segunda derivada

1. Fundamentos conceptuales

El criterio de la segunda derivada es una herramienta clave en el análisis de funciones para clasificar los puntos críticos como máximos, mínimos o puntos de inflexión. A diferencia del criterio de la primera derivada, que se basa en el cambio de signo de la derivada, el criterio de la segunda derivada utiliza la información sobre la concavidad de la función en un punto crítico para hacer esta clasificación (Apostol, 2019; Rodríguez, 2024).

Si $f'(x) = 0$ en un punto $x = c$, y ese punto es un punto crítico, la **segunda derivada** de la función en $x = c$ proporciona información crucial sobre la forma de la gráfica de la función en torno a ese punto.

La **segunda derivada** de una función se denota como $f''(x)$, y su signo nos dice lo siguiente:

- Si $f''(c) > 0$ la función es **cóncava hacia arriba** en el punto $x = c$ lo que significa que $x = c$ es un **mínimo relativo.**
- Si $f''(c) < 0$ la función es **cóncava hacia abajo** en el punto $x = c$ lo que significa que $x = c$ es un **máximo relativo.**
- Si $f''(c) = 0$ el criterio de la segunda derivada no proporciona información concluyente, y se debe recurrir a otros métodos (por ejemplo, análisis de la derivada de mayor orden o el uso de la primera derivada) (Pérez, 2022).

Este criterio es particularmente útil cuando se tiene un punto crítico $x = c$ y la primera derivada$f'(c) = 0$, ya que permite una clasificación más directa del tipo de punto crítico.

2. Aplicación de criterios de la segunda derivada

El procedimiento para aplicar el criterio de la segunda derivada es el siguiente:

1) **Encontrar la primera derivada** $f'(x)$ de la función $f(x)$.
2) **Encontrar los puntos críticos,** es decir, resolver $f'(x) = 0$ para obtener los valores de x que podrían ser máximos o mínimos.

3) **Calcular la segunda derivada** $f''(x)$.
4) **Evaluar la segunda derivada** en cada punto critico $x = c$.
   - Si $f''(c) > 0$ entonces $x = c$ es un **mínimo relativo.**
   - Si $f''(c) < 0$ entonces $x = c$ es un **máximo relativo.**
   - Si $f''(c) = 0$, el test es inconcluso, y se debe recurrir a otros métodos**.**

Este proceso proporciona una forma más directa y precisa de clasificar los puntos críticos, especialmente cuando se enfrenta a funciones complejas donde el análisis con la primera derivada puede no ser suficiente.

3. Ejemplo

Ejemplo 1: Determinación de máximos y mínimos utilizando el criterio de la segunda derivada

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar la aplicación del criterio de la segunda derivada. Supongamos que tenemos la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$$

Paso 1: Encontrar la derivada de la función

Ya hemos calculado anteriormente la primera derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Para encontrar los puntos críticos, resolvemos $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Factorizamos la ecuación cuadrática:

$$(x-3)(x-1)=0$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 1 \; y \; x = 3$

Paso 3: Calcular la segunda derivada

La segunda derivada de la función es:

$$f''(x) = 6x - 12$$

Paso 4: Evaluar la segunda derivada en puntos críticos

- En $x = 1$, evaluamos $f''(1)$

$$f''(1) = 6(1) - 12 = -6$$

Como $f''(1) < 0$, esto indica que $x = 1$ es un **máximo relativo.**

- En $x = 3$, evaluamos $f''(3)$:

$$f''(3) = 6(3) - 12 = -6$$

Como $f''(3) > 0$, esto indica que $x = 3$ es un **mínimo relativo.**

Paso 5: Concluir los resultados

- **Máximo relativo**: $x = 1$
- **Mínimo relativo**: $x = 3$

Este ejemplo muestra cómo el criterio de la segunda derivada permite clasificar los puntos críticos de una función como máximos o mínimos, y proporciona información sobre la concavidad de la función en esos puntos.

Aplicaciones

Las aplicaciones de los conceptos de máximos y mínimos derivados de las derivadas son fundamentales en diversas disciplinas de las ciencias exactas, económicas y de ingeniería. Las derivadas son herramientas esenciales no solo para el análisis matemático, sino también para la resolución de problemas prácticos, como la optimización en la ingeniería, la economía y las ciencias aplicadas (Stewart, 2016).

1. Optimización en economía: Maximización de beneficios y minimización de costos

Larson y Edwards (2013) señalan que una de las aplicaciones más comunes de las derivadas en la economía es la optimización de funciones de beneficio y costo. Por ejemplo, en economía, una empresa busca maximizar sus beneficios o minimizar sus costos. Esto se logra encontrando los puntos de máximo o mínimo de las funciones que describen los ingresos y los costos.

Ejemplo de maximización de beneficios: Supongamos que la función de beneficio $B(x)$ de una empresa está dada por:

$$B(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

Donde x es la cantidad de unidades producidas y vendidas. Para encontrar el valor de x que maximiza el beneficio, primero derivamos la función de beneficio:

$$B'(x) = -4x + 8$$

Luego, resolvemos $B'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:

$$-4x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Ahora, para determinar si $x = 2$ es un máximo, evaluamos la segunda derivada:

$$B''(x) = -4$$

Como $B''(x) < 0$, el punto $x = 2$ corresponde a un **máximo**. Esto indica que para maximizar los beneficios, la empresa debe producir y vender 2 unidades.

Ejemplo de minimización de costos: Supongamos que el costo total de producción $C(x)$ de una empresa está dado por la función:

$$C(x) = 3x^2 - 12x + 20$$

Donde x es la cantidad de unidades producidas. Para encontrar el valor de x que minimiza el costo, primero derivamos la función de costo:

$$C'(x) = 6x - 12$$

Luego, resolvemos $C'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:

$$6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Ahora, para determinar si $x = 2$ es un mínimo, evaluamos la segunda derivada:

$$C''(x) = 6$$

Como $C''(x) > 0$ el punto $x = 2$ corresponde a un mínimo. Esto significa que, para minimizar el costo de producción, la empresa debe producir 2 unidades.

2. Optimización en física: Determinación de puntos de equilibrio

En física, las derivadas son esenciales para estudiar sistemas dinámicos y localizar puntos de equilibrio, donde la fuerza neta o la aceleración es cero. Un ejemplo claro de esto es el análisis de la dinámica de un cuerpo en movimiento, que requiere derivadas para determinar los momentos en que la velocidad del objeto es cero (Tipler & Mosca, 2007).

Ejemplo de optimización en física: Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una trayectoria y su posición en función del tiempo t está dada por la siguiente función:

$$s(t) = -5t^2 + 20t + 10$$

Para encontrar los puntos de máximo o mínimo de la posición, derivamos $s(t)$:

$$s'(t) = -10t + 20$$

Resolviendo $s(t) = 0$ para encontrar el tiempo en el cual el objeto alcanza un punto de máximo o mínimos:

$$-10t + 20 = 0 \ \Longrightarrow t = 2$$

Para determinar si $t = 2$ es un máximo o mínimo, evaluamos la segunda derivada:

$$s''(t) = -10$$

Como $s''(t) < 0$, el punto $t = 2$ es un **máximo**. Esto indica que en $t = 2$, el objeto alcanza su posición máxima.

3. Optimización en biología: Modelado del crecimiento de poblaciones

En biología, las derivadas se utilizan para modelar el crecimiento de poblaciones y otros fenómenos dinámicos que implican tasas de cambio. El análisis de máximos y mínimos puede ayudar a predecir el comportamiento de las poblaciones en diferentes condiciones ambientales.

Ejemplo de crecimiento poblacional: Supongamos que el tamaño de una población $P(t)$ de una especie sigue la función:

$$P(t) = 100e^{0.05t}$$

Donde $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t. Para encontrar el punto en el que la tasa de crecimiento es máxima, calculamos la derivada de $P(t)$:

$$P'(t) = 5e^{0.05t}$$

Dado que $P(t) > 0$ para todos los valores de t, la población está siempre creciendo y no tiene un **máximo** o **mínimo** en su crecimiento. Este análisis es útil para predecir como las tasas de crecimiento cambian a lo largo del tiempo.

4. Optimización en ingeniería: Análisis de eficiencia de sistemas

En ingeniería, las derivadas se aplican en el análisis de eficiencia de sistemas, como en la optimización de la forma de un objeto para maximizar su eficiencia, minimizar la resistencia al aire o maximizar la resistencia estructural.

Ejemplo en ingeniería: Consideremos una viga que se somete a fuerzas de compresión. La fuerza $F(x)$ aplicada sobre la viga está dada por:

$$F(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

Para determinar el punto donde la viga experimenta la mínima resistencia (es decir, donde la fuerza es mínima), primero derivamos la función de la fuerza:

$$F'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

Luego, resolvemos $F'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0 \implies x = 1 \; o \; x = 3$$

Al evaluar la segunda derivada:

$$F''^{(x)} = -6x + 12$$

Evaluamos en $x = 1 \; y \; x = 3$:

- $F''(1) = 6 > 0$ indica un **mínimo** en $x = 1$.
- $F''(3) = -6 > 0$ indica un **mínimo** en $x = 1$.

Esto indica que la viga experimenta la **mínima resistencia** cuando $x = 1$.

El criterio de máximos y mínimos es crucial en la resolución de problemas de optimización en diversas áreas. La capacidad de aplicar las derivadas para encontrar y clasificar puntos críticos permite abordar cuestiones clave en economía, física, biología e ingeniería, entre otras disciplinas. Ya sea para maximizar beneficios, minimizar costos, analizar el crecimiento poblacional o mejorar la eficiencia de sistemas, las derivadas son herramientas poderosas para modelar, analizar y resolver problemas reales.

Observaciones finales

En este capítulo, se ha explorado el uso de las derivadas en la identificación y clasificación de los puntos de máximos y mínimos de una función. Se han presentado dos criterios principales: el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada, que permiten analizar y clasificar los puntos críticos de una función.

- **Criterio de la primera derivada**: A través de este criterio, se determinan los intervalos donde una función es creciente o decreciente, lo que ayuda a identificar los puntos de máximo y mínimo relativos.
- **Criterio de la segunda derivada**: Este criterio se utiliza para clasificar los puntos críticos de una función en máximos o mínimos absolutos, basándose en la concavidad de la función.

Asimismo, se han presentado aplicaciones prácticas en diferentes áreas del conocimiento, como la economía, física, biología e ingeniería, donde el análisis de máximos y mínimos es esencial para optimizar procesos, maximizar beneficios, minimizar costos y resolver problemas dinámicos.

El conocimiento y la aplicación de estos métodos son fundamentales para abordar problemas de optimización y análisis de tasas de cambio, que son comunes en muchas disciplinas científicas y de ingeniería.

Autoevaluación

A continuación, se presenta una serie de preguntas de autoevaluación que permitirán reforzar y poner en práctica los conceptos adquiridos en este capítulo.

1. Defina el concepto de máximo y mínimo relativo en el contexto de una función.
2. Explique la diferencia entre los criterios de la primera y segunda derivada para la identificación de máximos y mínimos.
3. Para la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, encuentre los puntos críticos y clasifique los puntos críticos utilizando el criterio de la primera derivada.
4. Determine si la función $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$ tiene algún punto de inflexión, máximo o mínimo relativo. Justifique su respuesta utilizando el criterio de la segunda derivada.
5. En el contexto de la optimización, ¿cómo se utilizan las derivadas para maximizar los beneficios o minimizar los costos en un modelo económico simple?
6. Explique cómo el análisis de la concavidad de una función utilizando la segunda derivada ayuda a clasificar los puntos críticos de una función.

Ejercicios de aplicación

1. **Optimización en economía**

Una empresa produce y vende productos a un precio dado. La función de ingresos $R(x)$ en función de la cantidad de productos vendidos x está dada por la siguiente ecuación:

$$R(x) = -2x^2 + 40x$$

Donde x es el número de unidades vendidas.

- **Parte a**: Determine la cantidad de productos x que maximiza los ingresos.
- **Parte b**: Calcule los ingresos máximos utilizando el valor de x encontrado en el inciso a).
- **Parte c**: Justifique si el valor encontrado corresponde a un máximo utilizando el criterio de la segunda derivada.

2. **Optimización en física**

La altura de un objeto lanzado verticalmente está dada por la siguiente función de la posición $s(t)$:

$$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$$

Donde t es el tiempo en segundos y $s(t)$ es la altura del objeto en pies.

- **Parte a**: Determine el tiempo en el que el objeto alcanza su altura máxima.
- **Parte b**: Utilizando el criterio de la segunda derivada, verifique si el tiempo encontrado corresponde a un máximo.

3. **Optimización en ingeniería**

Supongamos que el costo de producción de un artículo está dado por la siguiente función:

$$C(x) = 5x^2 - 20x + 100$$

Donde x es el número de artículos producidos.

- **Parte a**: Determine la cantidad de artículos x que minimiza el costo de producción.
- **Parte b**: Calcule el costo mínimo de producción.

Instrucciones:

Para cada ejercicio, encuentre los puntos críticos de la función, aplique los criterios de la primera y segunda derivada y clasifique los puntos críticos como máximos, mínimos o puntos de inflexión, según corresponda.

Referencias bibliográficas

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2015). Cálculo: Trascendentes tempranas (8th ed.). Wiley.

Apostol, T. M. (2019). Calculus I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal (1st ed., Vol. 1). Editorial Reverte.

Azpilicueta, J., Joaquín, D., & Molina, F. (2020). Análisis matemático I: Teoría, práctica y aplicaciones (J. Sarmiento, Ed.; 2nd ed., Vol. 2). Jorge Sarmiento Editor - Universitas.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). Cálculo con geometría analítica (10th ed.). Cengage Learning.

Pérez, R. (2022). Cálculo diferencial (R. Luján, Ed.; 2nd ed., Vol. 1). Klik.

Rodríguez, B. (2024). Derivadas y sus aplicaciones (1st ed., Vol. 1). Amazon Digital Services - Kdp.

Stewart, J. (2016). Cálculo de varias variables (8th ed.). Cengage Learning.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2007). Física para la ciencia y la tecnología (6th ed.). Editorial Reverté.

CAPÍTULO III

INTEGRAL INDEFINIDA

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este capítulo, los estudiantes serán capaces de:

- Entender la integral indefinida como antiderivada (inversa de la derivada).
- Aplicar reglas básicas de integración en ejercicios sencillos.
- Relacionar la integral con el cálculo de áreas bajo curvas.
- Usar integrales en problemas prácticos, como modelar fenómenos físicos o acumulativos.

Pregunta de enfoque

¿Cómo se utilizan las integrales indefinidas para calcular áreas bajo curvas y resolver problemas relacionados con el cambio acumulativo?

Resumen

En este capítulo se presenta el concepto de integral indefinida, una de las operaciones fundamentales en el cálculo integral. La integral indefinida se entiende como el proceso inverso de la derivación, y su objetivo principal es encontrar la función original a partir de su derivada. A través de esta operación, se busca acumular los cambios representados por la derivada en una función. Las integrales indefinidas son esenciales para resolver problemas de acumulación de cantidades, como el cálculo de áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución y otros problemas relacionados con el cambio acumulativo.

Además, se introduce la idea de que la integral indefinida tiene una relación estrecha con la derivada, ya que, al ser el proceso inverso de la derivación, se utiliza para "deshacer" los efectos de la derivada sobre una función. Este capítulo proporciona las reglas básicas para realizar integraciones, las cuales se aplican a funciones algebraicas, trascendentes y trigonométricas, y se presentan ejemplos prácticos para ilustrar su uso.

Integración, integral indefinida

1. Fundamentos conceptuales

La integral indefinida, también conocida como antiderivada, es uno de los conceptos fundamentales dentro del cálculo integral y constituye el proceso inverso a la derivación (Azpilicueta et al., 2020). En términos simples, mientras que la derivada de una función nos indica la rapidez con que cambia la función en un punto específico, la integral indefinida nos permite obtener una función cuyo cambio (derivada) es la función original que estamos considerando (Marín, 2016).

Matemáticamente, si $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$, esto significa que:

$$F'(x) = f(x)$$

En este contexto, la integral indefinida de una función $f(x)$ con respecto a x, denotada como $\int f(x)\,dx$, es simplemente una familia de funciones cuya derivada es $f(x)$. Este concepto es central en el cálculo porque permite encontrar las funciones originales a partir de sus tasas de cambio.

La integral indefinida es denominada así porque no incluye límites de integración, a diferencia de la integral definida, que se utiliza para calcular áreas bajo curvas entre dos puntos específicos (Mortimer & Blinder, 2024). Como resultado, la integral indefinida genera una familia de funciones que difieren por una constante, representada generalmente por C. Esto se debe a que, al derivar una constante, el resultado es cero, y, por lo tanto, cualquier constante añadida a una antiderivada no afectará su derivada.

La notación general de la integral indefinida es:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Donde:

- $f(x)$ es la función que se va a integrar.
- $F(x)$ es una de las funciones cuya derivada es $f(x)$.
- C es la constante de integración, que refleja la infinita cantidad de soluciones posibles.

La integral indefinida es útil en una variedad de campos, no solo en matemáticas puras, sino también en disciplinas como la física y la ingeniería (Martínez-Miraval et al., 2022). En estos campos, las integrales se emplean para calcular magnitudes acumulativas, como el trabajo realizado por una fuerza o la distancia recorrida por un objeto en movimiento.

1.1.Relación entre derivada e integral

El concepto de integral indefinida está directamente relacionado con la derivada. Mientras que la derivada mide el cambio instantáneo de una función, la integral mide la acumulación de estos cambios a lo largo de un intervalo. Esta relación está encapsulada en el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece que la integral definida de una función en un intervalo puede ser evaluada mediante una antiderivada (Anaya et al., 2022).

El teorema se divide en dos partes:

- **Primera parte del Teorema Fundamental del Calculo:** Si F es una antiderivada de f en un intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Segunda parte del Teorema Fundamental del Calculo:** Si f es continua en un intervalo [a,b], entonces f tiene una antiderivada en ese intervalo (Mortimer & Blinder, 2024).

Este teorema subraya la idea de que la integral de una función puede calcularse a través de la antiderivada, lo que conecta de manera directa la operación de integración con la de derivación.

1.2.Significado geométrico de la integral indefinida

Aunque la integral indefinida no tiene una interpretación geométrica directa como la integral definida, que representa áreas bajo una curva, su valor reside en su capacidad para deshacer los efectos de la derivación (Mierluş-Mazilu et al., 2020). De hecho, si tenemos una curva representada por una función $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ nos da una familia de funciones $F(x)$, las cuales pueden interpretarse como las "curvas originales" que, al derivarse, nos devuelven la función $f(x)$.

En términos más concretos, podemos pensar que la integral indefinida nos da la forma general de una curva, mientras que la derivada nos da la pendiente de esa curva en cada punto.

2. Reglas del cálculo integral para la resolución de integrales indefinidas e inmediatas

En el cálculo integral, existen varias reglas que permiten resolver integrales indefinidas de manera sistemática. Estas reglas son esenciales para abordar integrales de funciones comunes, como polinomios, exponenciales, trigonométricas y otras (Blinder, 2013). Las principales reglas son las siguientes:

Regla de la potencia

La integral de la función x^n, donde $n \neq -1$, es:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Regla de la suma

La integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada función. Es decir, si $f(x)\ y\ g(x)$ son funciones, entonces:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int (x^3 + x^2)dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

Regla de la constante

Si c es una constante, entonces:

$$\int c\,dx = c \cdot x + C$$

Ejemplo:

$$\int 5\,dx = 5x + C$$

Integrales de funciones exponenciales

Para la función exponencial e^x, su integral es:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Ejemplo:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Integrales de funciones trigonométricas

Las integrales de las funciones trigonométricas más comunes son:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = -\sin(x) + C$$

Ejemplo:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

Regla de la substitución (o cambio de variable)

La regla de la sustitución es útil cuando una función dentro de la integral se puede transformar de manera sencilla. Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)\, du$$

Ejemplo:

$$\int 2\mathrm{x} \cdot e^{x^2} dx$$

Realizando la sustitución $u = x^2, du = 2xdx$, la integral se convierte en:

$$\int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

Regla de la integración por partes

La regla de integración por partes es una herramienta útil cuando se multiplican dos funciones. Se deriva de la fórmula de derivación del producto:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Donde u y v son funciones de x. Esta regla es fundamental cuando se enfrenta a productos de funciones que no pueden ser integrados directamente con las reglas anteriores.

3. Ejemplo

A continuación, se resuelve un ejemplo utilizando las reglas de integración.

Calcular la integral indefinida:

$$\int (3x^2 + 5x + 7)dx$$

Solución:

Aplicamos la regla de la suma y la regla de la potencia a cada término:

$$\int 3x^2\, dx = \frac{3x^3}{3} = x^3$$

$$\int 5x\, dx = \frac{5x^2}{2}$$

$$\int 7\, dx = 7x$$

Sumando todos los resultados:

$$\int (3x^2 + 5x + 7)\, dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} + 7x + C$$

Este ejemplo ilustra cómo aplicar las reglas básicas de integración para resolver una integral indefinida de un polinomio.

Integrales inmediatas

1. Fundamentos conceptuales

Las integrales inmediatas son aquellas integrales que pueden ser resueltas sin necesidad de realizar transformaciones o sustituciones complicadas. En otras palabras, son integrales que pueden resolverse directamente mediante las reglas básicas de integración, como la regla de la potencia, la regla de la constante, o las integrales de funciones trigonométricas y exponenciales (Azpilicueta et al., 2020; Marín, 2016). Estas integrales corresponden a las funciones más comunes que aparecen en el cálculo, por lo que se pueden resolver de forma rápida y sencilla con una serie de fórmulas estándar.

El término "inmediato" se refiere a la simplicidad de la función a integrar, lo que permite obtener la antiderivada de manera directa sin complicaciones adicionales. Estas integrales son esenciales en el cálculo y permiten resolver una amplia variedad de problemas básicos de acumulación y áreas bajo curvas.

1.1. Relación con el cálculo diferencial

Una característica importante de las integrales inmediatas es que, dado que son directamente aplicables mediante reglas básicas de integración, pueden considerarse la antiderivada directa de funciones cuyo comportamiento es ya conocido (Marín, 2016). La antiderivada es simplemente la operación inversa de la derivada: si una función es derivada y tenemos la forma general de su derivada, entonces podemos utilizar las reglas de integración para encontrar la función original.

1.2. Aplicaciones

Las integrales inmediatas tienen aplicaciones importantes en diversas áreas de la matemática y las ciencias (Rodríguez, 2024). En física, por ejemplo, se utilizan para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante, o la distancia recorrida por un objeto en movimiento cuando su velocidad es una función polinómica simple. En economía, se utilizan para calcular funciones de acumulación de ganancias o costos en escenarios donde las tasas de cambio son s encillas (Azpilicueta et al., 2020).

1.3. Función general de la integral inmediata

Dada una función $f(x)$, la integral inmediata $\int f(x)\,dx$ corresponde a una de las antiderivadas de esa función. Esto implica que, al aplicar las reglas básicas de integración, obtenemos la forma general de la función, más una constante C (constante de integración), que refleja que existen múltiples funciones posibles cuya derivada es $f(x)$.

2. Reglas de integración para la resolución de integrales inmediatas

Las reglas de integración para resolver integrales inmediatas son fundamentales en el cálculo integral. A continuación, se presentan las reglas más importantes que se aplican directamente a funciones comunes.

Regla de la Potencia

Como se mencionó anteriormente, la regla de la potencia es una de las reglas más fundamentales para integrar funciones de la forma x^n, donde $n \neq -1$:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo:

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Regla de la Constante

Si c es una constante, la integral de una constante es simplemente la constante multiplicada por la variable de integración:

$$\int c\,dx = c \cdot x + C$$

Ejemplo:

$$\int 7\,dx = 7x + C$$

Integrales de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales de la forma x^e tienen una integral directa que es igual a la función misma. Este es un caso particular de las integrales de funciones exponenciales, ya que e^x es la única función cuya derivada y su integral son la misma.

Propiedad general:

La integral de e^x es igual a sí misma, más una constante de integración C. Es decir:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Ejemplo:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Además, si la función exponencial tiene un coeficiente distinto a 1 en el exponente, como e^{ax}, la integral es:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Ejemplo:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Integrales de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas más comunes también tienen integrales inmediatas. Algunas de las más importantes son:

$$\int \sin{(x)}\,dx = -\cos{(x)} + C$$

$$\int \cos{(x)}\,dx = sin\,(x) + C$$

Además, la integral de $\sec^2(x)$ es:

$$\int \sec^2(x)\,dx = tan\,(x) + C$$

Ejemplo:

$$\int \sin(x)\,dx = -cos\,(x) + C$$

Regla de la Suma

Si tenemos la suma de dos funciones, la integral se puede realizar integrando cada función individualmente:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Ejemplo:

$$\int (3x^2 + 5x)\, dx = \int 3x^2\, dx + \int 5x\, dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} + C$$

Integrales de funciones logarítmicas

La integral del logaritmo natural de x es una de las integrales estándar, y es:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Funciones inversas

Algunas funciones inversas, como $arctan\ (x)$, tienen integrales inmediatas bien conocidas:

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(\mathrm{x}) + \mathrm{C}$$

3. Ejemplo

Para ilustrar cómo se resuelven las integrales inmediatas, vamos a resolver un ejemplo utilizando las reglas anteriores.

Calcular la integral indefinida de la siguiente función:

$$\int (4x^3 + 3e^{2x} - 5\sin\,(x))\, dx$$

Solución:

Aplicamos las reglas de integración correspondientes a cada término de la suma:

- Para $4x^3$, usamos la **regla de la potencia:**

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^4}{4} = x^4$$

- Para $3e^{2x}$, usamos la **regla de las exponenciales:**

$$\int 3e^{2x}\,dx = 3\cdot\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{3}{2}e^{2x}$$

- Para $-5\sin(x)$, usamos la **integral de** $\sin(x)$**:**

$$\int -5\sin(x)\,dx = 5\cos(x)$$

Por lo tanto, la integral de toda la expresión es:

$$\int (4x^3 + 3e^{2x} - 5\sin(x))\,dx = x^4 + \frac{3}{2}e^{2x} + 5\cos(x) + C$$

Este ejemplo demuestra cómo se resuelven las integrales inmediatas aplicando las reglas estándar de integración a cada término de la función.

Miscelánea de integrales inmediatas

1. Fundamentos conceptuales

En el cálculo integral, la miscelánea de integrales inmediatas abarca un conjunto diverso de integrales que no encajan estrictamente dentro de las categorías más simples, como las funciones polinómicas, exponenciales o trigonométricas. Estas integrales incluyen funciones que, aunque no son complejas, requieren un enfoque diferente para ser resueltas de manera directa, pero aún dentro del ámbito de las integrales inmediatas.

Las funciones que caen en esta categoría son aquellas que incluyen combinaciones de términos, como raíces cuadradas, fracciones, logaritmos y otros elementos que requieren algo más que las reglas básicas que hemos cubierto anteriormente. Sin embargo, muchas de estas integrales pueden ser resueltas aplicando una combinación de las reglas ya presentadas y un entendimiento más amplio de los métodos básicos de integración.

El término "misceláneo" refleja la naturaleza variada de este grupo de integrales, que a menudo involucra términos más complejos o funciones que pueden ser resueltas de manera directa pero que no necesariamente siguen las reglas más simples de integración. Estas integrales suelen ser más desafiantes, pero siguen siendo parte del espectro de integrales inmediatas, ya que no requieren técnicas avanzadas como sustituciones o partes, sino solo una combinación adecuada de reglas y patrones (Quiroga, 2008; Vargas, 2012).

1.1. Tipos de funciones en la miscelánea de integrales inmediatas

Las funciones que típicamente se incluyen en la miscelánea de integrales inmediatas incluyen, pero no se limitan a:

- **Fracciones algebraicas**: Funciones del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$,donde tanto $p(x)$ como $q(x)$ son polinomios.
- **Funciones con raíces**: Como $\sqrt{x}$ o $\sqrt{x^2+1}$
- Funciones logarítmicas y exponenciales compuestas.
- Funciones que involucren constantes multiplicadas por términos trigonométricos o exponenciales.

A pesar de ser más variadas, estas funciones pueden ser integradas utilizando las reglas ya mencionadas, como la regla de la potencia, la regla de la constante, o incluso utilizando sustituciones simples.

2. Reglas de integración para la resolución de integrales inmediatas

Las integrales que caen dentro de la categoría de miscelánea aún pueden resolverse mediante las reglas de integración que hemos aprendido, pero algunas requieren un enfoque algo diferente o una combinación de reglas (Sastoque et al., 2022). A continuación, se presentan las reglas más relevantes para la resolución de estas integrales:

Integrales de fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas son cocientes de polinomios, y muchas veces se pueden resolver directamente mediante la división o el uso de fracciones parciales. Para fracciones sencillas, la regla de la división de términos en el numerador y denominador puede ayudar a reducir la fracción a una forma integrable directamente.

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Integrales de funciones con raíces cuadradas

Las raíces cuadradas, o funciones de la forma $\sqrt{u}$, donde u es una función de x, pueden resolverse utilizando la regla de la potencia. En general, si $u(x)$ es una función de x, tenemos:

$$\int \sqrt{u(x)} dx = \int u(x)^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} u(x)^{3/2} + C$$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Integrales de términos trigonométricos multiplicados por constantes

Cuando tenemos una constante multiplicada por una función trigonométrica, podemos simplemente aplicar la regla de la constante y luego resolver la integral de la función trigonométrica.

Ejemplo:

$$\int 7 \sin(x)\, dx = -7\cos(x) + C$$

Integrales de fracciones trigonométricas

Algunas fracciones que involucran funciones trigonométricas pueden ser integradas directamente si son de la forma estándar. Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

Integrales de funciones logarítmicas

Las integrales de logaritmos, especialmente de la forma $\frac{1}{x}$, son comunes y pueden resolverse con la regla estándar:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Además, cuando las funciones logarítmicas aparecen en combinaciones con otros términos, es posible que necesiten una sustitución o simplificación.

Integrales con constantes multiplicadas por funciones exponenciales

Si una constante multiplica a una función exponencial, la integral se resuelve directamente usando la regla de la integral de e^{ax}:

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

Ejemplo:

$$\int 3e^{ax}\, dx = \frac{3}{2} e^{ax} + C$$

3. Ejemplos

Para ilustrar cómo se resuelven las integrales de la miscelánea de integrales inmediatas, vamos a resolver algunos ejemplos con fracciones algebraicas y raíces.

Ejemplo 1: Calcular la integral de la siguiente función

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

Solución:

La integral $\frac{1}{x^2}$ es equivalente a la integral de x^{-2}. Aplicamos la regla de la potencia para obtener:

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

Por lo tanto, la integral $\frac{1}{x^2}$ es:

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$$

Ejemplo 2: Calcular la integral de la siguiente función

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Solución:

La función $\frac{1}{\sqrt{x}}$ es equivalente a $x^{-1/2}$. Aplicamos la regla de la potencia:

$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2x^{1/2} + C$$

Por lo tanto, la integral de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ es:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$$

4. Ejercicios propuestos

Para reforzar los conceptos expuestos en esta sección, se proponen los siguientes ejercicios:

Calcular la integral de las siguientes funciones:

Ejercicio 1:

$$\int \frac{2}{x^3}dx$$

Ejercicio 2:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}} dx$$

Ejercicio 3:

$$\int 3\sin(x)\, dx$$

Ejercicio 4:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

Ejercicio 5:

$$\int e^{3x}\, dx$$

Integraciones diferenciales trigonométricas

1. Fundamentos conceptuales

Las integraciones diferenciales trigonométricas se refieren a la integración de funciones que involucran expresiones trigonométricas (Ruiz et al., 2017). Este tipo de integrales es fundamental en el cálculo integral debido a que las funciones trigonométricas son comunes en muchos campos de las matemáticas y las ciencias aplicadas, como la física, la ingeniería y la biología.

Las funciones trigonométricas, como $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, y sus combinaciones, son esenciales para modelar fenómenos periódicos como las oscilaciones, el movimiento armónico simple, las ondas electromagnéticas, y muchos otros comportamientos cíclicos. Dado que las derivadas de las funciones trigonométricas son también funciones trigonométricas (por ejemplo, la derivada de $\sin(x)$ es $\cos(x)$, y la derivada de $\cos(x)$ es $-\sin(x)$, las integrales que contienen estas funciones son comunes y esenciales en el análisis de sistemas dinámicos y periódicos.

Identidades trigonométricas: Existen ciertas identidades trigonométricas que facilitan la integración de expresiones más complejas. Por ejemplo, la identidad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ puede ser utilizada para simplificar integrales que contienen términos cuadráticos de seno y coseno.

2. Desafíos en las integraciones trigonométricas

Aunque muchas integrales trigonométricas pueden resolverse utilizando reglas directas, algunas funciones trigonométricas pueden requerir transformaciones adicionales para que la integral sea más fácil de resolver (Poznyak, 2008). Estas transformaciones pueden incluir el uso de identidades trigonométricas, sustituciones o incluso la aplicación de técnicas avanzadas como la Integración por partes o la sustitución trigonométrica.

Por ejemplo, las integrales que involucran productos de funciones trigonométricas, como $\sin(x)\cos(x)$, pueden requerir la aplicación de identidades de producto a suma, tales como:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Esto facilita la integración al convertir una expresión de producto en una de suma, que es mucho más sencilla de integrar.

3. Reglas de integración para la resolución de integrales con diferenciales trigonométricas

Las reglas de integración para funciones trigonométricas siguen un patrón bien establecido y se aplican de forma sistemática a diversas combinaciones de funciones trigonométricas. A continuación, se presentan las reglas más importantes para resolver integrales que involucran funciones trigonométricas.

Integrales de $\sin(x)$ y $\cos(x)$

Las integrales de las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son directas y muy comunes:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

Integral de $\sec^2(x)$

La integral de $\sec^2(x)$ es especialmente importante porque aparece como frecuencia en el análisis de funciones relacionadas con la tangente:

$$\int \sec^2(x)\, dx = \tan(x) + C$$

Integral de $\csc^2(x)$

De manera similar, la integral de $\csc^2(x)$ es importante y tiene la forma:

$$\int \csc^2(x)\, dx = -\cot(x) + C$$

Integral de $\tan(x)$

La integral de la tangente, que es una función que aparece comúnmente en problemas relacionados con pendientes y ángulos, se resuelve mediante el logaritmo natural de sec (x):

$$\int \tan(x)\, dx = \ln |\sec(x)| + C$$

Integral de $\cot(x)$

$$\int \cot(x)\, dx = \ln |\sin(x)| + C$$

Integrales de productos de funciones trigonométricas

Cuando se tiene un producto de funciones trigonométricas, como $\sin(x)\cos(x)$, es útil aplicar identidades trigonométricas para simplificar la integral. En el caso de $\sin(x)\cos(x)$, podemos usar la identidad:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Por lo tanto, la integral de $\sin(x)\cos(x)$ se convierte en:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Integrales de funciones trigonométricas elevadas a una potencia

En casos donde tenemos funciones trigonométricas elevadas a una potencia, como $\sin^{\mathrm{n}}(x)$ o $\cos^{\mathrm{n}}(x)$, es necesario utilizar identidades trigonométricas para simplificar la integral. Por ejemplo, si n es impar, podemos reducir la potencia de $\sin(x)$ o $\cos(x)$ utilizando identidades trigonométricas. Si n es par, es común aplicar identidades de doble ángulo.

4. Ejemplos

Vamos a resolver un ejemplo utilizando las reglas de integración para las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1: Calcular la integral $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$.

Usamos la identidad trigonométrica para el producto de $\sin(x)\cos(x)$:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Entonces, la integral se convierte en:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

Ahora integramos $\sin(2x)$:

$$\int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Por lo tanto, la integral $\sin(x)\cos(x)$ es:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Ejemplo 2: Calcular la integral de $\int \tan(x)\, dx$.

Sabemos que la integral de $\tan(x)$ es:

$$\int \tan(x)\, dx = \ln|\sec(x)| + C$$

Este es un ejemplo directo utilizando una de las reglas más comunes para funciones trigonométricas.

Miscelánea de integración diferenciales trigonométricas

En esta sección, exploramos algunos ejemplos más complejos que involucran integrales de funciones trigonométricas y sus combinaciones (Vargas, 2012). Estos ejemplos ilustran cómo resolver integrales que no siguen las formas más simples de funciones trigonométricas y requieren el uso de identidades trigonométricas, sustituciones o combinaciones de reglas de integración.

Ejemplo 1: Integración de $\sin^2(x)$

Calcular la integral de $\int \sin^2(x)\, dx$.

Para integrar $\sin^2(x)$, utilizamos una **identidad trigonométrica** para simplificar la expresión. Usamos la identidad de doble ángulo:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Entonces la integral se convierte en:

$$\int \sin^2(x)\, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx$$

Esto se puede separar en dos integrales:

$$\frac{1}{2}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

La integral de 1 es simplemente x, y la integral de $\cos(2x)$ es $\frac{1}{2}\sin(2x)$, así que:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Por lo tanto, la integral de $\sin^2(x)$:

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Ejemplo 2: Integración de $\cos^2(x)$

Calcular la integral de $\int \cos^3(x)\, dx$.

Para integrar $\cos^2(x)$, utilizamos una estrategia de reducción, aplicando la identidad $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Así, podemos reescribir la integral de la siguiente manera:

$$\int \cos^3(x)\, dx = \int \cos(\mathrm{x})\,(1 - \sin^2(x))dx$$

Usamos la **sustitución** $u = \sin(x)$, de modo que $du = cos(x)dx$, lo que convierte la integral en:

$$\int (1 - u^2)\, du$$

Integrando término por término:

$$\int 1\, du - \int u^2\, du = u - \frac{u^3}{3} + C$$

Volviendo a $u = \sin(x)$, tenemos:

$$\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

Por lo tanto, la integral de $\cos^3(x)\, es$:

$$\int \cos^3(x)\, dx = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

Ejemplo 3: Integración de $\sin(x)\cos(x)$

Calcular la integral de $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$.

Ya hemos visto que para integrales de $\sin(x)\cos(x)$, podemos utilizar la identidad trigonométrica de producto a suma:

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Esto convierte la integral en:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

Integrando $\sin(2x)$, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Por lo tanto, la integral $\sin(x)\cos(x)$ es:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Ejemplo 4: Integración de $\sec^2(x)$

Calcular la integral de $\int \sec^2(x)\,dx$.

Sabemos que la integral de $\sec^2(x)$ es una formula estándar:

$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$$

Este es un ejemplo directo de una integral trigonométrica fundamental.

1.1. Ejercicios propuestos evaluativos

- **Ejercicio 1:** Calcular la integral de $\int \sin^2(x)\,dx$.
- **Ejercicio 2:** Calcular la integral de $\int \cos^3(x)\,dx$.
- **Ejercicio 3:** Calcular la integral de $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$.

- **Ejercicio 4:** Calcular la integral de $\int \sec^2(x)\,dx$.
- **Ejercicio 5:** Calcular la integral de $\int \frac{1}{1+\tan^2(x)}\,dx$.
- **Ejercicio 6:** Calcular la integral de $\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx$.
- **Ejercicio 7:** Calcular la integral de $\int \csc^2(x)\,dx$.

Observaciones finales

En este capítulo, hemos explorado en profundidad el concepto de integral indefinida, cubriendo tanto los fundamentos teóricos como las técnicas de integración para resolver una amplia variedad de funciones. La integral indefinida es una operación esencial en el cálculo integral, que permite encontrar las funciones originales a partir de sus derivadas. A través de este proceso, hemos visto cómo las integrales son fundamentales para resolver problemas de acumulación, como el cálculo de áreas bajo curvas, y cómo se aplican en áreas como la física, la economía y la ingeniería.

A lo largo de este capítulo, se proporcionaron ejemplos prácticos que ilustran cómo aplicar estas técnicas y reglas a una variedad de funciones. Al final de cada sección, se incluyeron ejercicios propuestos que permiten reforzar el aprendizaje y practicar las habilidades adquiridas.

Autoevaluación

Para asegurar que los estudiantes han comprendido los conceptos y las técnicas presentadas en este capítulo, se proponen las siguientes preguntas:

1. Defina el concepto de integral indefinida y explique su relación con la derivada.
2. ¿Cómo se resuelve la integral de una función de la forma x^n, con $n \neq -1$?
3. ¿Qué diferencia hay entre una integral indefinida y una integral definida? Explique con un ejemplo.
4. ¿Cuál es la integral indefinida de $\sec^2(x)$? ¿Y la de $\csc^2(x)$?
5. Utilizando identidades trigonométricas, calcule la integral de $\sin^2(x)$.
6. Explique cómo se resuelve la integral $\int \tan(x)\, dx$.
7. Para la integral $\int \sin(x)\cos(x)\, dx$, ¿qué identidad trigonométrica podría usarse para simplificar la integración?
8. En el caso de una integral que involucra $\cos^3(x)$, ¿qué estrategia de integración sería más adecuada para resolverla?

Resumen

Esta sección final del capítulo proporcionó un resumen de los temas tratados, junto con una autoevaluación que permite a los estudiantes comprobar su comprensión del contenido. El ejercicio de aplicación ofreció una oportunidad para aplicar lo aprendido en una situación práctica de física, utilizando la integración para calcular el trabajo realizado por una fuerza variable.

Con la conclusión de esta sección, los estudiantes han adquirido una base sólida en la resolución de integrales indefinidas, con un enfoque en funciones algebraicas, exponenciales, trigonométricas y sus combinaciones, lo que les permitirá abordar problemas más avanzados de cálculo y sus aplicaciones en ciencias y tecnología.

Referencias bibliográficas

Anaya, I. J. J., Leal, J. E. F., & Parada Rico, S. E. (2022). An approach to the fundamental theorem of calculus through realistic mathematics. *Educación Matemática, 34*(1), 280–305. https://doi.org/10.24844/EM3401.10

Azpilicueta, J., Joaquín, D., & Molina, F. (2020). *Análisis matemático I: Teoría, práctica y aplicaciones* (J. Sarmiento, Ed.; 2nd ed., Vol. 2). Jorge Sarmiento Editor - Universitas.

Blinder, S. M. (2013). Calculus. Guide to essential math, 79–100. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407163-6.00006-0

Marín, A. (2016). *Ecuaciones integrales* (2nd ed., Vol. 2). Editorial Universitaria.

Martínez-Miraval, M. A., García-Rodríguez, M. L., Martínez-Miraval, M. A., & García-Rodríguez, M. L. (2022). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria, 15*(4), 105–118. https://doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Mierluş-Mazilu, I., Constantinescu, Ş., Niţă, L., & de Santos-Berbel, C. (2020). Applications of integral calculus. In *Calculus for engineering students: Fundamentals, real problems, and computers* (pp. 119–135). https://doi.org/10.1016/B978-0-12-817210-0.00013-8

Mortimer, R. G., & Blinder, S. M. (2024). Integral calculus. In *Mathematics for physical chemistry* (2nd ed., Vol. 2, pp. 71–85). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-44-318945-6.00012-0

Poznyak, A. S. (2008). Selected topics of real analysis. In *Advanced mathematical tools for automatic control engineers: Deterministic techniques* (pp. 315–395). https://doi.org/10.1016/B978-008044674-5.50019-5

Quiroga, A. (2008). *Introducción al cálculo II* (1st ed., Vol. 1). Delta Publicaciones.

Rodríguez, B. (2024). *Derivadas y sus aplicaciones* (1st ed., Vol. 1). Amazon Digital Services - Kdp.

Ruiz, Á., Ruiza, Á., & Barrantes, H. (2017). *Elementos de cálculo diferencial Volumen I y II* (2nd ed., Vol. 2). Editorial Universidad de Costa Rica.

Sastoque, E., Escorcia, E., & Velásquez, W. (2022). *Técnicas de integración en el cálculo integral* (1st ed., Vol. 1). Editorial.

Vargas, J. (2012). *Miscelánea de ejercicios Módulo I y II* (2nd ed., Vol. 2). Konrad Lorenz.

CAPÍTULO IV

INTEGRAL DEFINIDA

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este capítulo, los estudiantes serán capaces de:

- Comprender el concepto de integral definida y su relación con la derivada.
- Calcular el área bajo una curva utilizando la integral definida.
- Resolver problemas aplicados mediante la integral definida en diversas áreas de la ciencia y la matemática.
- Reconocer las aplicaciones de la integral definida en situaciones prácticas, como el cálculo de áreas, volúmenes y otras magnitudes acumulativas.

Pregunta de enfoque

¿Qué diferencias existen entre la integral indefinida y la definida, y cómo se utiliza la integral definida para calcular el área bajo una curva?

Resumen

Este capítulo se centra en el concepto de la integral definida, una de las herramientas fundamentales en el cálculo integral. La integral definida no solo tiene un fuerte vínculo con la derivada, sino que también tiene una interpretación geométrica clara: la integral definida se utiliza principalmente para calcular el área bajo una curva entre dos puntos específicos en el eje x. A lo largo del capítulo, se explorará cómo las integrales definidas nos permiten resolver problemas de acumulación, como el cálculo de áreas, longitudes, volúmenes, y otros fenómenos aplicados en distintas disciplinas científicas.

Integral definida

1. Fundamentos conceptuales

La integral definida es una de las herramientas clave del cálculo integral, utilizada principalmente para calcular áreas bajo curvas y resolver problemas de acumulación en diversas disciplinas científicas y matemáticas. Esta integral se distingue de la integral indefinida por estar limitada a un intervalo específico de integración, lo que implica que se calcula en un rango determinado entre dos valores, llamados límites de integración (Nair, 2022).

Matemáticamente, la integral definida de una función $f(x)$ entre dos límites a y b se expresa como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

En esta notación:

- $f(x)$ es la función que estamos integrando.
- a y b son los límites de integración, donde a es el límite inferior y b el límite superior.
- dx indica la variable de integración, en este caso, respecto de x.

2. Interpretación geométrica

La integral definida tiene una interpretación geométrica clara: se puede ver como el cálculo del área entre la curva $f(x)$ y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Sin embargo, esto es válido solo si la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$. Si la función toma valores negativos, la integral representa el área "por debajo" del eje x, que se cuenta como negativa.

En términos sencillos, la integral definida permite sumar infinitos elementos infinitesimales, $f(x) \cdot dx$, a lo largo de un intervalo, lo que lleva al cálculo de áreas, desplazamientos, volúmenes, etc. (Nair, 2021; Preyra, 2022). Esta idea se conoce como suma de Riemann, que fue propuesta por el matemático alemán Bernhard Riemann en el siglo XIX. La suma de Riemann implica dividir el área bajo la curva en pequeños rectángulos de base infinitesimal y sumarlos. A medida que la base de estos rectángulos se hace infinitesimalmente pequeña, la suma se convierte en una integral.

2.1. Relación con la derivada

El concepto de la integral definida está estrechamente relacionado con la derivada a través del Teorema Fundamental del Cálculo. Este teorema establece que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tiene una antiderivada en ese intervalo, entonces la integral definida de la función en ese intervalo se puede calcular mediante la evaluación de la antiderivada en los extremos del intervalo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Este resultado proporciona una forma eficiente de calcular la integral definida sin necesidad de recurrir a sumas infinitas de rectángulos (Anaya et al., 2022; Nair, 2021).

3. Propiedades de la integral definida

La integral definida tiene varias propiedades útiles que facilitan su cálculo y aplicación. Algunas de las más importantes son:

- **Linealidad**

$$\int_a^b \big(c \cdot f(x) + g(x)\big)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Donde c es una constante.

- **Adición de intervalos**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si c es un valor entre a y b, entonces la integral en el intervalo $[a, b]$ se puede dividir en dos integrales más pequeños.

- **Cambio de límites de integración (teorema de la reversibilidad)**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Si se invierten los límites de integración, la integral cambia de signo.

- **Monotonía**

  Si $f(x)$ es mayor que $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$$

Estas propiedades hacen que el proceso de integración sea flexible y se pueda aplicar a una amplia variedad de problemas matemáticos y científicos.

4. Reglas de integración para el cálculo de la integral definida y del área bajo la curva

Existen diversas reglas que nos permiten calcular la integral definida de manera más eficiente. A continuación, se describen algunas de las más comunes:

- **Regla de la potencia**
  Si $f(x) = x^n$ donde $n \neq 1$, l a integral definida de x^n en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

  Esta regla es fundamental cuando la función a integrar es un monomio.

- **Regla de la constante**
  Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces la integral definida de c en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_c^b cdx = c(b - a)$$

  Esta es una de las integrales más simples, ya que solo requiere multiplicar la constante por la longitud del intervalo.

- **Regla de la suma**

  Si tenemos una suma de funciones $f(x) = g(x) + h(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

  Esto se basa en la linealidad de la integral, que permite descomponer una integral en varias más simples.

- **Regla de sustitución (cambio de variable)**

  La sustitución es útil cuando una integral involucra una función compuesta. Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

  Esta regla simplifica muchas integrales, especialmente aquellas que involucran composiciones de funciones.

5. Ejemplo

Cálculo del área bajo una curva compuesta

Supongamos que queremos calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ en el intervalo [0,4].

La integral definida que representa el área bajo esta curva es:

$$\int_0^4 (3x^2 - 5x + 2)dx$$

Paso 1: Desglosar la integral en términos de sus partes

Primero, podemos descomponer la integral en tres términos, gracias a la linealidad de la integral:

$$\int_0^4 (3x^2 - 5x + 2)dx = \int_o^4 3x^2dx - \int_o^4 5xdx - \int_o^4 2dx$$

Paso 2: Integrar cada término por separado

Ahora, vamos a integrar cada uno de estos tres términos por separado, aplicando las reglas básicas de integración:

- **Integrar $3x^2$**

  Para este término, aplicamos la regla de la potencia, que nos dice que la integral de x^n es:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

  En este caso, tenemos $n = 2$, por lo que:

$$\int_0^4 3x^2\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} |_0^4 = x^3 |_0^4 = 4^3 - 0^3 = 64$$

- **Integrar $5x$**

  De nuevo, aplicamos la regla de la potencia con $n = 1$:

$$\int_0^4 -5x dx = -5 \cdot \frac{x^2}{2} |_0^4 = -\frac{5}{2} \cdot (4^2 - 0^2) = -\frac{5}{2} \cdot 16 = -40$$

- **Integrar 2**

  Para este término, la integral de una constante c es simplemente:

$$\int_0^4 2dx = 2x |_0^4 = 2(4) - 2(0) = 8$$

Paso 3: Sumar los resultados de cada término

Ahora que hemos resuelto cada término, sumamos los resultados obtenidos:

$$\int_o^4 (3x^2 - 5x + 2)dx = 64 - 40 + 8 = 32$$

Resultado final:

El área bajo la curva $\int_o^4 (3x^2 - 5x + 2)dx$ en el intervalo [0,4] es 32 unidades cuadradas.

Interpretación geométrica

Este ejemplo no solo muestra cómo se realiza el cálculo de la integral definida, sino que también ilustra su interpretación geométrica. En términos sencillos:

- La función $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ es una parábola. Para el intervalo [0,4], la integral nos da el área encerrada entre la curva de la función y el eje x.
- La integral calcula "el área bajo la curva", pero también es importante notar que si la función es negativa en algún intervalo (como puede ocurrir si la parábola cruza el eje x), entonces el área debajo del eje se cuenta como negativa.

En este caso, dado que la función es mayor que cero en todo el intervalo [0,4], la integral simplemente calcula el área completa bajo la curva, sin necesidad de restar áreas negativas.

Área bajo la curva

1. Principios matemáticos del álgebra lineal

El cálculo del área bajo una curva se basa en la interpretación geométrica de la integral definida. Para abordar este concepto de manera sólida, es necesario comprender algunos principios fundamentales del álgebra lineal que son esenciales para la integración y, específicamente, para la determinación del área bajo una curva (Nguyen, 2024).

1.1. Espacios vectoriales y sus propiedades

En álgebra lineal, un espacio vectorial es un conjunto de vectores que cumplen con ciertas propiedades, como la adición de vectores y la multiplicación por escalares. Estos vectores pueden representar diferentes magnitudes, como desplazamientos, fuerzas, o funciones. En el contexto de la integral, las funciones se comportan como "vectores" que se suman y se multiplican de manera similar a como se hace en el álgebra lineal.

El concepto de espacio vectorial es crucial para el cálculo de áreas bajo curvas porque nos permite sumar áreas infinitesimales a lo largo de un intervalo. Este proceso es similar a la suma de Riemann (una aproximación a la integral definida), en la cual la suma de áreas de pequeños rectángulos en un intervalo se aproxima al área total bajo la curva.

1.2. Composición lineal y combinación lineal

Otro principio importante es la combinación lineal. En álgebra lineal, una combinación lineal de vectores es una suma ponderada de estos vectores, lo cual es equivalente a la forma en la que las áreas infinitesimales bajo una curva se suman para obtener el área total (Nguyen, 2025). En el caso de la integral definida, la función bajo la integral actúa como una combinación lineal de los valores de la función evaluados en diferentes puntos, multiplicados por un diferencial infinitesimal (Nguyen, 2024, 2025).

2. Transformaciones lineales y la geometría de la integral

Las transformaciones lineales son operaciones que llevan vectores en un espacio a otros vectores, preservando la aditividad y la multiplicación por escalares. En el contexto de las integrales, las transformaciones lineales pueden ser vistas como un medio para "modificar" la función original para calcular el área bajo su curva de manera más eficiente, especialmente al usar sustituciones o cambios de variables (Pérez, 2022).

Un caso típico de transformación lineal en integrales es el cambio de variable, que permite transformar una integral complicada en una más sencilla. Por ejemplo, en una integral de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Podemos aplicar una sustitución de variables $u = g(x)$, lo cual es análogo a aplicar una transformación lineal en álgebra lineal. Este cambio simplifica la función que se integra y facilita el cálculo del área.

2.1. Concepto de norma y distancias

El concepto de norma en álgebra lineal se refiere a la "longitud" de un vector. En el contexto de las integrales, esta "longitud" se puede interpretar como el cambio en el valor de la función a medida que avanzamos a lo largo de un intervalo. La integral de una función puede ser vista como una acumulación de "distancias" infinitesimales a lo largo de la curva, lo que resulta en el área bajo ella (Strang, 2009).

La noción de distancia también se refleja en el cálculo del área bajo la curva al interpretar la integral como la suma de distancias verticales a lo largo de la curva, integrando a lo largo del intervalo definido.

2.2. Aplicaciones de los principios del álgebra lineal en la integración

El álgebra lineal se utiliza ampliamente en el contexto de la integración porque proporciona herramientas para manejar funciones de manera eficiente (Azpilicueta et al., 2020). Las propiedades de los espacios vectoriales, combinaciones lineales y transformaciones lineales se reflejan en cómo se resuelven las integrales definidas, especialmente al considerar integrales de funciones compuestas o al realizar transformaciones de variables.

Por ejemplo, en el cálculo del área bajo la curva de una función $f(x)$, cada "diferencial" de la integral puede ser interpretado como un vector en un espacio multidimensional. La suma de estos vectores, o "diferenciales", nos proporciona el área total bajo la curva.

3. Ejemplos

Cálculo del área bajo una curva

Vamos a considerar el siguiente ejemplo de cálculo del área bajo una curva utilizando la integral definida y aplicando los principios matemáticos del álgebra lineal.

Ejemplo 1: Área bajo la curva de una función polinómica

Supongamos que queremos calcular el área bajo la curva de la función:

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

en el intervalo [1,4].

Paso 1: Definición de la integral definida

El área bajo la curva de $f(x)$ entre $x = 1$ y $x = 4$ se puede calcular mediante la integral definida de la función en este intervalo:

$$A = \int_1^4 (2x^2 + 3x + 1)dx$$

Paso 2: Aplicación de las reglas de integración

Para resolver esta integral, aplicamos las reglas básicas de integración. Primero, integramos cada término de la función de manera individual:

- **La integral de $2x^2$ es:**

$$\int 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3}$$

- **La integral de $3x$ es:**

$$\int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2}$$

- **La integral de 1 es:**

$$\int 1dx = x$$

Por lo tanto, la integral de la función es $2x^2 + 3x + 1$ es:

$$\int (2x^2 + 3x + 1)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x$$

Paso 3: Evaluación en los límites de integración

Ahora, evaluamos esta antiderivada en los límites de integración $x = 4$ y $x = 1$:

- **Evaluación en $x = 4$:**

$$\frac{2(4)^3}{3} + \frac{3(4)^2}{2} + 4 = \frac{2(64)}{3} + \frac{3(16)}{2} + 4 = \frac{128}{3} + 24 + 4 = \frac{128}{3} + 28 \approx 70.67$$

- **Evaluación en $x = 1$:**

$$\frac{2(1)^3}{3} + \frac{3(1)^2}{2} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} \approx 3.17$$

Paso 4: Cálculo del área total

Restamos la evaluación en $x = 1$ de la evaluación en $x = 4$:

$$A = \left(\frac{128}{3} + 28\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right)$$

Para realizar esta operación, necesitamos que los denominadores sean comunes. El común denominador entre 3 y 2 es 6, por lo que:

$$A = \left(\frac{256}{6} + \frac{168}{6}\right) - \left(\frac{4}{6} + \frac{15}{6}\right)$$

Simplificando:

$$A = \frac{256 + 158}{6} - \frac{4 + 15}{6} = \frac{424}{6} - \frac{19}{6} = \frac{405}{6} = 67.5$$

Resultado final:

El área bajo la curva de $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ en el intervalo [1,4] es 67.5 unidades cuadradas.

Ejemplo 2: Área bajo la curva de una función exponencial

Consideremos la función:

$$f(x) = e^x$$

Queremos calcular el área bajo la curva de $f(x) = e^x$ en el intervalo [0,2].

Paso 1: Definición de la integral definida

El área bajo la curva se calcula mediante la integral definida:

$$\int_0^2 e^x \, dx$$

Paso 2: Aplicación de la regla de integración

Sabemos que la integral de e^xes simplemente e^x. Por lo tanto, la antiderivada de e^xes:

$$\int_0^2 e^x \, dx = e^x$$

Paso 3: Evaluación en los límites de integración

Evaluamos la antiderivada en los límites de integración:

- **Evaluación en $x = 2$:**

$$e^2$$

- **Evaluación en $x = 0$:**

$$e^0 = 1$$

Paso 4: Cálculo del área total

Restamos la evaluación en $x = 0$ de la evaluación en $x = 2$:

$$A = e^2 - 1$$

Usando una aproximación de $e^2 \approx 7.389$, tenemos:

$$A \approx 7.389 - 1 = 6.389$$

Resultado final:

El área bajo la curva de $f(x) = e^x$ en el intervalo [0,2] es aproximadamente 6.389 unidades cuadradas.

Ejemplo 3: Área bajo la curva de una función trigonométrica

Consideremos la función:

$$f(x) = \sin(x)$$

Queremos calcular el área bajo la curva de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Paso 1: Definición de la integral definida

El área bajo la curva se calcula mediante la integral definida:

$$A = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

Paso 2: Aplicación de la regla de integración

Sabemos que la integral $\sin(x)$ es $-\cos(x)$. Por lo tanto, la antiderivada de $\sin(x)$ es:

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$$

Paso 3: Evaluación en los límites de integración

Evaluamos la antiderivada en los límites de integración:

- Evaluación en $x = \pi$

$$-\cos(\pi) = -(-1) = 1$$

- Evaluación $x = 0$:

$$-\cos(0) = -1$$

Paso 4: Cálculo del área total

Restamos la evaluación en $x = 0$ de la evaluación en $x = \pi$:

$$A = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Resultado final:

El área bajo la curva de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ es 2 unidades cuadradas.

Ejemplo 4: Área bajo la curva de una función racional

Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Queremos calcular el área bajo la curva de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1,3]$.

Paso 1: Definición de la integral definida

El área bajo la curva se calcula mediante la integral definida:

$$A = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

Paso 2: Aplicación de la regla de integración

Sabemos que la integral de $\frac{1}{x}$ es ln $|x|$. Por lo tanto, la antiderivada de $\frac{1}{x}$ es:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

Paso 3: Evaluación en los límites de integración

Evaluamos la antiderivada en los límites de integración:

- **Evaluación en $x = 3$:**

$$\ln (3)$$

- **Evaluación en $x = 1$:**

$$\ln(1) = 0$$

Paso 4: Cálculo del área total

Restamos la evaluación en $x = 1$ de la evaluación en $x = 3$:

$$A = \ln(3) - 0 = \ln (3)$$

Usando una aproximación de $\ln(3) \approx 1.099$, tenemos:

$$A \approx 1.099$$

Resultado final:

El área bajo la curva de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1,3]$ es aproximadamente 1.099 unidades cuadradas.

Aplicaciones del análisis matemático

El análisis matemático tiene una gran variedad de aplicaciones en diversos campos como la física, la ingeniería, la economía, la biología y muchas otras ciencias (Azpilicueta et al., 2020; Rodríguez, 2024). Las herramientas del cálculo, como las integrales definidas, se utilizan para modelar fenómenos de cambio acumulativo, como el cálculo de áreas, volúmenes, desplazamientos, trabajo, y optimización.

A continuación, se presentan varios ejemplos para ilustrar cómo se aplican los principios del análisis matemático en diferentes contextos.

Ejemplo 1: Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable

En física, el trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre un objeto a lo largo de un desplazamiento es un concepto clave. Si la fuerza $F(x)$ depende de la posición del objeto x, el trabajo W realizado por la fuerza cuando el objeto se mueve desde la posición x_1 hasta x_2 está dado por la integral de la fuerza en ese intervalo:

$$W = \int_{x^1}^{x^2} F(x)dx$$

Aplicación:

Supongamos que una fuerza $F(x) = 3x^2$ actúa sobre un objeto que se mueve desde $x = 1$ hasta $x = 4$. Queremos calcular el trabajo realizado por la fuerza en este intervalo.

La integral que representa el trabajo es:

$$W = \int_1^4 3x^2 \, dx$$

Calculando la integral:

$$W = 3\int_1^4 x^2 \, dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}4\\1\end{matrix}$$

Evaluamos la integral en los límites:

$$W = 3\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right] = 3\left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = 3\,\frac{63}{3} = 3 \cdot 21 = 63$$

Resultado final:

El trabajo realizado por la fuerza $F(x) = 3x^2$ al mover un objeto desde $x = 1$ a $x = 4$ es 63 unidades de trabajo.

Ejemplo 2: Cálculo del área entre dos curvas

En geometría, a menudo necesitamos calcular el área encerrada entre dos curvas. Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, en el área entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se puede calcular mediante la integral definida de la diferencia de las funciones:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$$

Aplicación:

Supongamos que queremos calcular el área entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[0,1]$. La integral que representa el área entre las curvas es:

$$A = \int_0^1 (x - x^2) \, dx$$

Calculando la integral:

$$A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

Integrando ambos términos:

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \left[\frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

Evaluamos las integrales:

$$A = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Resultado final:

El área entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$ en el intervalo [0,1] es $1/6$ unidades cuadradas.

Ejemplo 3: Cálculo de volumen de un sólido de revolución

En geometría, uno de los problemas más interesantes es calcular el volumen de un sólido obtenido por la rotación de una curva alrededor de un eje. El volumen de un sólido de revolución generado por la rotación de una función $f(x)$ alrededor del eje x en el intervalo $[a, b]$ está dado por la siguiente fórmula:

$$V = \pi \int_a^a [f(x)]^2\ dx$$

Aplicación:

Supongamos que queremos calcular el volumen de un sólido de revolución generado al rotar la curva $f(x) = \sqrt{x}$ alrededor del eje x en el intervalo [0,4].

La integral que representa el volumen es:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \; dx = \pi \int_0^4 x dx$$

Calculando la integral:

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

Evaluamos la integral:

$$V = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \pi \left(\frac{16}{2}\right) = 8\pi$$

Resultado final:

El volumen del sólido de revolución generado por la curva $f(x) = \sqrt{x}$ al rotarla alrededor del eje x en el intervalo $[0,4]$ es 8π unidades cubicas.

4. Ejercicios propuestos evaluativos

A continuación se presentan algunos ejercicios prácticos que permiten aplicar los conceptos y técnicas estudiadas. Estos ejercicios se enfocan en el cálculo de áreas, volúmenes, trabajo y optimización utilizando integrales definidas.

Ejercicio 1: Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable

Una fuerza $F(x) = 2x^3$ actúa sobre un objeto que se mueve a lo largo de un eje x. Calcula el trabajo realizado por la fuerza cuando el objeto se desplaza desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Instrucciones:

1) Define la integral para el cálculo del trabajo.
2) Realiza la integración y evalúa en los límites de integración.
3) Interpreta el resultado.

Ejercicio 2: Cálculo del área entre dos curvas

Encuentra el área encerrada entre las curvas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 2x$ en el intervalo $[0,2]$.

Instrucciones:

1) Define la integral que representa el área entre las curvas.
2) Realiza la integración de la diferencia de las funciones.
3) Evalúa la integral y calcula el área.

Ejercicio 3: Cálculo del volumen de un sólido de revolución

Encuentra el volumen de un sólido generado al rotar la curva $f(x) = 3x$ alrededor del eje x en el intervalo $[1,3]$.

Instrucciones:

1) Escribe la fórmula para el volumen de revolución.
2) Realiza la integración usando la fórmula de volumen de revolución.
3) Evalúa la integral y encuentra el volumen.

Ejercicio 4: Optimización de un área

La longitud de un alambre es de 100 metros, y se va a cortar en dos partes: una se doblará para formar un círculo y la otra se usará para hacer un cuadrado. ¿Cuánto debe medir el alambre de cada parte para que el área total (área del círculo + área del cuadrado) sea máxima?

Instrucciones:

1) Define las ecuaciones del área del círculo y el área del cuadrado.
2) Establece la función de área total en función de una sola variable (la longitud del alambre de una de las partes).
3) Utiliza la derivada para encontrar la longitud óptima que maximiza el área total.

Observaciones finales

En este capítulo hemos explorado los conceptos fundamentales de la integral definida y sus aplicaciones, principalmente centrados en el cálculo del área bajo una curva. Además, hemos visto cómo este concepto se utiliza en una variedad de disciplinas para modelar fenómenos de acumulación, como el trabajo realizado por una fuerza, el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, y la determinación de áreas entre curvas.

Hemos aprendido que el cálculo de áreas bajo una curva es una de las aplicaciones más directas de la integral definida, y que este proceso se extiende a muchos otros contextos científicos y de ingeniería. Desde la física hasta la economía, el análisis matemático ofrece herramientas poderosas para resolver problemas reales. A través de las integrales definidas, es posible entender y modelar la acumulación de magnitudes en intervalos específicos, lo que es crucial para aplicaciones prácticas como la optimización, la mecánica, la economía y la biología.

Además, hemos abordado cómo los principios del álgebra lineal, como la linealidad y la combinación de funciones, permiten la resolución de problemas complejos en diversas áreas. La relación entre la derivada y la integral, tal como lo demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo, refuerza la idea de que ambos conceptos son herramientas complementarias e indispensables en el análisis matemático.

Autoevaluación

Para comprobar tu comprensión de los conceptos tratados en este capítulo, te invitamos a resolver los siguientes ejercicios. Esto te ayudará a verificar tu dominio del tema y a identificar áreas en las que puedas necesitar más práctica.

1) **¿Qué es una integral definida y cómo se utiliza para calcular el área bajo una curva?** Explica el concepto de integral definida y su relación con el cálculo del área bajo una curva.
2) **Resuelve el siguiente problema de trabajo:** Una fuerza $F(x) = 4x^2$ actúa sobre un objeto que se mueve desde $x = 1$ hasta $x = 3$. Calcula el trabajo realizado por la fuerza en este intervalo.
3) **Área entre dos curvas:**

Calcula el área entre las curvas $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = x^2 + 4xg(x) = x^2 + 4xg(x) = x^2 + 4x$ en el intervalo $[0,2]$.

4) Volumen de revolución:

Encuentra el volumen del sólido de revolución generado al rotar la curva $f(x) = x^2$ alrededor del eje x en el intervalo $[0,2]$.

5) Optimización:

La longitud de un alambre es de 50 metros. Se quiere cortar en dos partes: una se usará para formar un círculo y la otra para un cuadrado. ¿Qué longitud debe tener cada parte para que el área total (área del círculo + área del cuadrado) sea máxima?

Referencias bibliográficas

Anaya, I. J. J., Leal, J. E. F., & Parada Rico, S. E. (2022). An approach to the fundamental theorem of calculus through realistic mathematics. Educación Matemática, 34(1), 280–305. https://doi.org/10.24844/EM3401.10

Azpilicueta, J., Joaquín, D., & Molina, F. (2020). Análisis matemático I: Teoría, práctica y aplicaciones (J. Sarmiento, Ed.; 2nd ed., Vol. 2). Jorge Sarmiento Editor - Universitas.

Nair, M. T. (2021). Definite integral. In Calculus of one variable (pp. 173–249). https://doi.org/10.1007/978-3-030-88637-0_3

Nair, M. T. (2022). Calculus of one variable, second edition (pp. 1–337). https://doi.org/10.1007/978-3-030-88637-0

Nguyen, V. P. (2024). Linear algebra. In Mathematics for engineers and scientists (pp. 937–1067). https://doi.org/10.1007/978-981-97-4631-6_9

Nguyen, V. P. (2025). Mathematics for engineers and scientists: Concepts, applications, and history (pp. 1–1170). https://doi.org/10.1007/978-981-97-4631-6

Pérez, R. (2022). Cálculo diferencial (R. Luján, Ed.; 2nd ed., Vol. 1). Klik.

Preyra, L. (2022). Cálculo integral (2nd ed., Vol. 2). Klik.

Rodríguez, B. (2024). Derivadas y sus aplicaciones (1st ed., Vol. 1). Amazon Digital Services - Kdp.

"Análisis Matemático" es una obra integral dirigida a estudiantes y profesionales que buscan una comprensión profunda y aplicada del análisis matemático, una disciplina esencial en las ciencias exactas y aplicadas. A través de una estructura didáctica y accesible, este libro cubre los conceptos clave del cálculo diferencial e integral, con un enfoque claro en su utilidad práctica en áreas como la física, la economía, la ingeniería y otras ciencias aplicadas.

El libro comienza con una introducción detallada a la derivada, explorando su concepto fundamental, su historia, y su aplicación en el análisis de funciones. Se explican las principales técnicas de derivación, desde funciones algebraicas hasta trascendentes e implícitas, con numerosos ejemplos y ejercicios que permiten a los lectores interiorizar las técnicas de cálculo diferencial de manera efectiva.

A continuación, se abordan las aplicaciones de la derivada, particularmente en la identificación de máximos, mínimos y puntos de inflexión, fundamentales en problemas de optimización y análisis de curvas. El texto también profundiza en el cálculo integral, introduciendo la integral indefinida como una herramienta poderosa para resolver problemas de acumulación y áreas bajo curvas. Además, se exploran técnicas de integración avanzadas y su conexión con la derivada, destacando su relevancia para modelar fenómenos físicos y económicos.

A lo largo del texto, los lectores encontrarán ejemplos prácticos, ejercicios resueltos y problemas que ilustran cómo aplicar los principios del análisis matemático a situaciones reales, lo que convierte a esta obra en una herramienta invaluable tanto para el estudio académico como para su aplicación en investigaciones científicas y profesionales.

"Análisis Matemático" es una obra completa y accesible que no solo proporciona una base sólida en los fundamentos del cálculo, sino que también prepara a los lectores para enfrentar los desafíos matemáticos más complejos en su carrera profesional.

Queyám editorial Cía. Ltda.

ISBN: 978-9942-7409-0-8

9 789942 740908